加德纳趣味数学系列





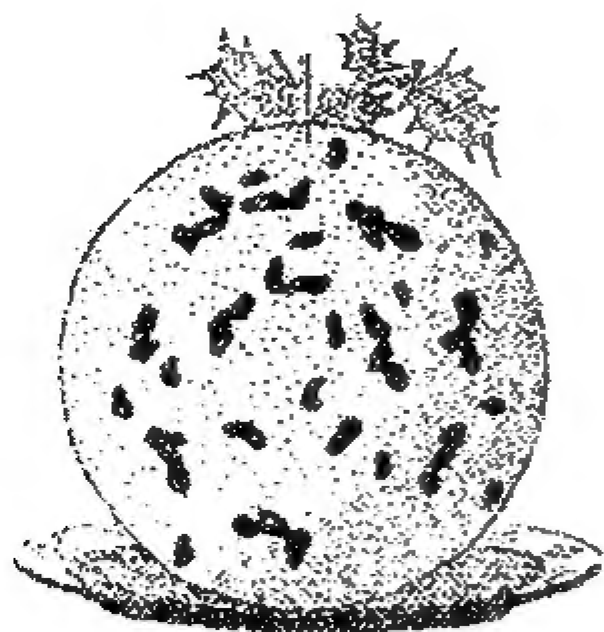
亨利·杜德尼的数学趣题

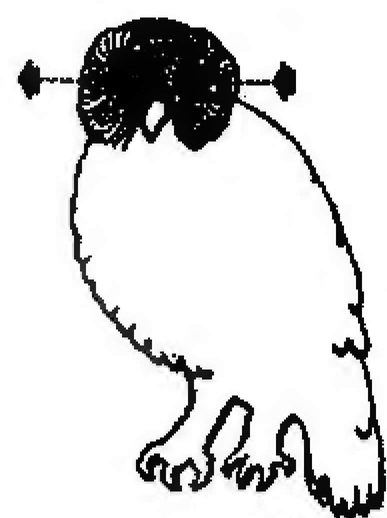
AMUSEMENTS IN MATHEMATICS

[英]亨利·杜德尼 著
周水涛 译

上海科技教育出版社

♣加德纳趣味数学系列♣

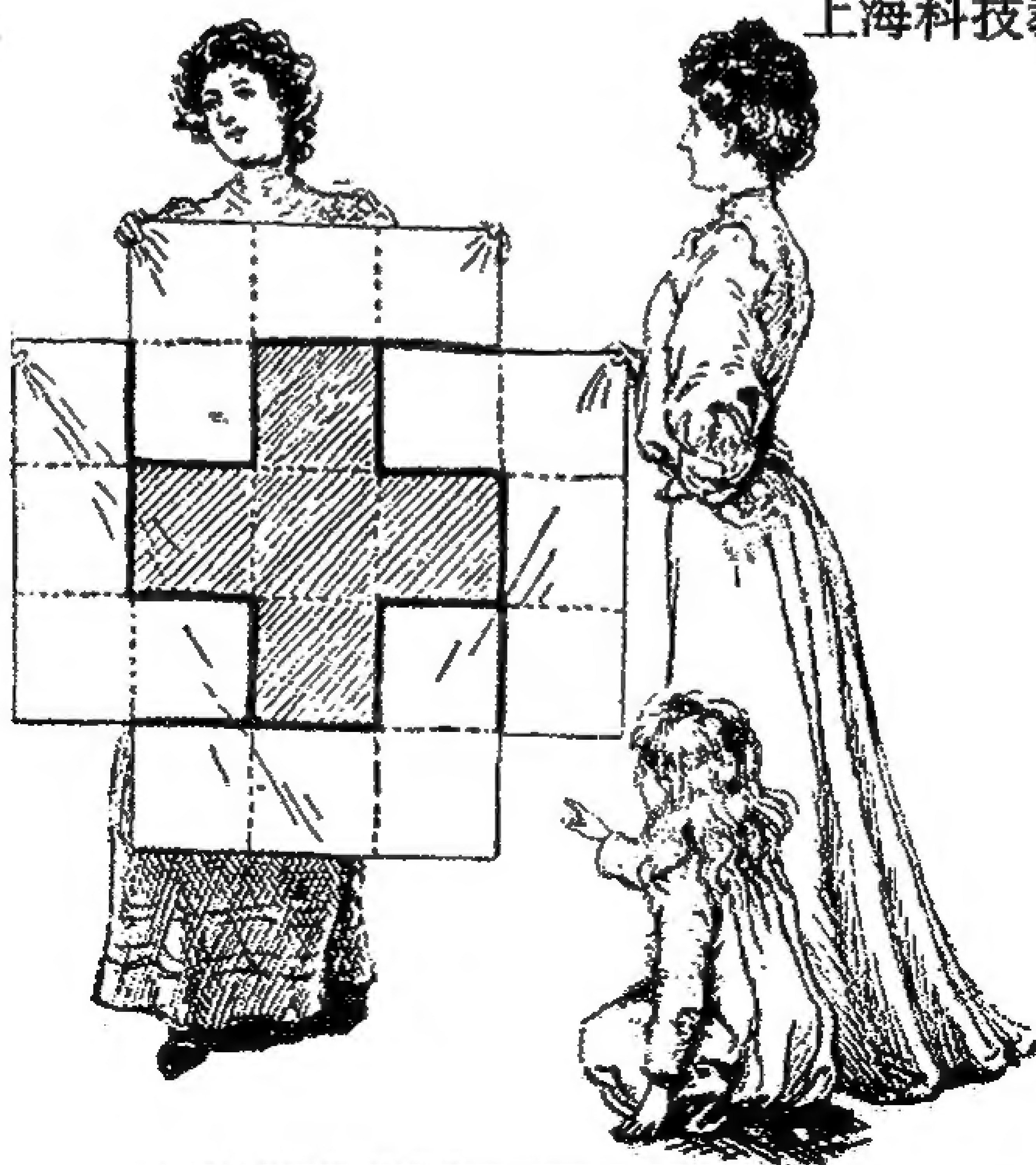




亨利·杜德尼的数学趣题

[英]亨利·杜德尼 著
周水涛 译

上海科技教育出版社



♣加德纳趣味数学系列♣

亨利·杜德尼的数学趣题

[英]亨利·杜德尼　著

周水涛　译

责任编辑：朱惠霖

装帧设计：桑吉芳

出版发行：上海世纪出版股份有限公司

上 海 科 技 教 育 出 版 社

(上海市冠生园路 393 号　邮政编码 200235)

网　址：www.ewen.cc

www.sste.com

经　销：各地新华书店

印　刷：常熟兴达印刷有限公司

开　本：850×1168　1/32

字　数：262 000

印　张：11.25

插　页：1

版　次：2007 年 1 月第 1 版

印　次：2007 年 1 月第 1 次印刷

印　数：1—5 000

书　号：ISBN 978-7-5428-4108-7/O·464

定　价：22.00 元

图书在版编目(CIP)数据

亨利·杜德尼的数学趣题/(英)杜德尼著;周水涛译.
—上海:上海科技教育出版社,2007.4
(加德纳趣味数学系列)
书名原文:Amusements in Mathematics
ISBN 978-7-5428-4108-7

Ⅰ.亨... Ⅱ.①杜...②周... Ⅲ.数学—普及读物
Ⅳ.O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第130987号

序　言

在出版我这本数学趣题集子(其中有些趣题已在期刊上出现过,其他都是在这里首次露面)的时候,我必须向国内外许多素昧平生的来函者所给予的鼓励表示感谢,他们表达了这样的一个愿望:把这些题目结集成册,并且以报刊不可能给予的较大篇幅对一些题目作出较详细的解答。虽然我也收进了少数几个让这世界上好几代人都兴趣盎然的古老趣题(我感到对它们还有一些新的东西要说),但仍可以说这里的题目基本上是原创的。确实,其中有些题目通过报刊已广为人知,但读者也可能很乐意知道它们的来源。

关于数学趣题的一般理论问题,我在其他地方已发表过一些观点,这里恐怕没有什么可说的了。这方面的历史所能遗赠的,无非是关于人类精确思维的肇始和发展的实际过程。历史学家必须以人类第一次成功地数出自己十个手指和成功地把一只苹果分为大致相等的两部分的时候为起点。每一道值得考虑的趣题都可

认为是属于数学和逻辑学。每一个男人、女人和孩子,只要在试图“推出”哪怕最简单的趣题的答案,纵然他不一定意识到,他就是在按着数学思路在思索。甚至那些除了随意的尝试外我们没有其他解决途径的趣题,也可以归于用一种已被称为“光荣测试”(Glorified Trial)的方法——一种通过避免或排除我们的推理所告知的无效尝试来减少我们工作量的方法。当然,有时候要说出这种“经验过程”始于何处终于何时,可不是一件容易的事。

当一个人说“我这一生中从未解过一道趣题”时,我们很难确切地弄懂他的意思,因为每一位有正常智能的人每天都在解题目。我们疯人院里那些不幸的居住者被人们急忙送到那儿,是因为他们不能解题了——因为他们失去了推理的能力。如果没有题目可解,那么也就没有问题可问;而如果没有问题可问,这将是个什么样的世界!我们将人人都无所不知,无所不晓,而我们的交谈也将变得毫无作用而且百无聊赖。

可能有那么一些过分严谨的数学家,他们在他们所喜爱的这门科学中,一向不能容忍除了正规术语之外的其他任何称法,一向反对让难懂的 x 和 y 以其他任何名义出现。他们但愿

许多题目在表达时用一种不那么通俗的修饰，在引入时用一种不那么活泼的措辞。对此我只能请他们注意我这本书名称的第一个词[1]，提醒他们我们主要是为了娱乐——当然，也不是没有带着某种顺便拾取点滴知识的愿望。如果说这种态度方式未免轻率，我只能用试金石[2]的话说：它是"一个丑陋的东西，殿下，然而是我自己的东西；这是我的一个坏习性，殿下。"

至于题目的难度问题，有些趣题，特别是"算术和代数"这一门类中的题目，是十分容易的。然而，就在这些题目中，有一些虽然看上去极其简单，却不应该一点不加考虑地予以忽视，因为你会不时发现其中暗藏着多少有点巧妙的陷阱和圈套，一不小心就会掉入。这是一种很好的练习题，它让你养成对题目中的用词细看明察的习惯，它让你学会严谨和缜密。但是有些题目确实有着非常难啃的内核，并非不值得引起前沿数学家的注意。读者无疑应当根据个人的品味进行选择。

---

① 本书英文原名是 *Amusements in Mathematics*，第一个词即 amusement，义"娱乐"。——译者注

② 试金石（Touchstone），一译达士东，莎士比亚戏剧《皆大欢喜》（*As You Like It*）中的一个人物。下文所引的话见于该剧第五幕第四场。但作者在这里引用的并非完整的句子，而且由于上下文的关系，这里的译文与国内莎剧经典译本中的有所不同。——译者注

在许多情况下，我只给出简单的答案。这就给初入门者留下了一些对他们很有益的事情——自己把解题过程补出来。这样做也省下了在解题高手们看来是浪费的一些篇幅。另一方面，在某些看来很可能令人感兴趣的场合，我给出了相当详尽的解答，并用一种一般的方式来处理题目。读者经常会发现，对一道题目的注解完全可以适用于本书中好多其他的题目；因此当他看下去的时候，有时会发现他原先的困难已一扫而光。有些地方我会说对一件事情用了一种一般来说或许“人们都能理解”的方式，我喜欢使用这个简单的说法，并以此吸引更多公众的注意和兴趣。在这种情况下，数学家不难用他熟悉的符号把所考虑的事情表达出来。

我在阅读校样时万分仔细，因此自信基本上不可能漏过任何差错。如果真有差错的话，我只能搬出贺拉斯[①]的话：“杰出的荷马有时也会打瞌睡。”或者，按那位主教的说法，“连我教区中最年轻的助理牧师也不会永不犯错。”[②]

---

① 贺拉斯（Horace，公元前65—前8），古罗马诗人。下面所引的话出自他的《诗艺》（*Ars Poetica*），意即“智者千虑，必有一失”。——译者注

② 经查，只发现英国学者、剑桥大学三一学院院长威廉·赫普沃思·汤普森（William Hepworth Thompson，1810—1886）有类似的名言：“我们当中没有人能永不犯错，连我们中最年轻的也不例外。”虽然该学院的历届院长中不乏主教，但据有关资料，汤普森并没有当过主教。——译者注

我必须向《海滨杂志》(*Strand Magazine*)、《卡斯尔的杂志》(*Cassell's Magazine*)、《女王》(*The Queen*)、《趣闻》(*Tit-Bits*)和《每周快讯》(*The Weekly Dispatch*)的老板们表示我特别的谢意，因为他们慨然应允我重新发表一些已在这些杂志上刊登过的趣题。

1917年3月25日于
作者俱乐部

20世纪初英国的货币、邮票及计量单位

杜德尼的一些趣题，涉及20世纪初英国的货币。读者如果不熟悉，就无法解题。故在此作一简单介绍。

英国货币的基本单位是镑，也称英镑。比较小的单位有先令、便士、法寻。**在20世纪初，1英镑等于20先令，1先令等于12便士，1便士等于4法寻。**

当时英国发行的硬币及其进制如下表：

名　称	进　制
法寻	1法寻 $=\frac{1}{4}$便士
半便士	
便士	
两便士	
三便士	
四便士	
六便士	
先令	1先令=12便士
弗罗林	1弗罗林=2先令
半克朗	1半克朗=2先令6便士
双弗罗林	1双弗罗林=4先令
克朗	1克朗=5先令
半沙弗林	1半沙弗林=10先令
沙弗林	1沙弗林=20先令或1镑
几尼	1几尼=21先令

在杜德尼生活的时代，英国通行的邮票有以下这些面值：半便士、一便士、一便士半、两便士、两便士半、三便士、四便士、五便士、六便士、九便士、十便士、一先令、两先令六便士、五先令、十先令、一镑和五镑。

本书使用的计量单位基本上是英制计量单位。解题计算时涉及进制的主要是长度和面积的单位。本书出现的英制长度单位有英寸、英尺、码、杆和英里，其进制是：1 英尺等于 12 英寸，1 码等于 3 英尺（36 英寸），1 杆等于 5.5 码（16.5 英尺），1 英里等于 320 杆（1760 码或 5280 英尺）。本书出现的英制面积单位除了长度单位的平方形式（如平方英尺）外，还有英亩。1 英亩等于 4840 平方码。

目　次

括号里是答案的页码

算术和代数问题

他是个什么样的人呢？哼，一个算术大家。

——威廉·莎士比亚:《奥赛罗》，第1幕第1场

这个部分中的趣题，为着读者的方便，被粗粗地归成了几类。有些题目非常容易，有些则十分困难。但是它们并没有按照某种难度次序编排——这是有意的，因为不让解题者事先觉察到一道趣题的难易程度，应该是一种比较恰当的做法。因此，一道趣题可能确实像它看上去的那样十分容易，也可能藏有某种陷阱，一不小心或过分自信，我们就会跌进去。

同样，也没有把算术趣题与代数趣题按一些作者所采取的方式区分开来。这些作者强行要求某些题目一定要用这种或那种方法解决，而在我们这里，读者可以自由地作出选择，决定哪些趣题能够被他用纯粹的算术思路解决。

钱币趣题

不要把你的信念放在金钱上,而要把你的金钱放在信念上。

——霍姆斯①

1 邮局里的困惑

在日常的各种交易活动中,我们偶尔会被一些意想不到的问题所困惑,弄得我们一时真有点晕乎。我非常同情一家邮政支局里的一位年轻的职员小姐。当时有一位先生走了进来,把一枚一克朗硬币朝柜台上一放,要求道:“请给我一些两便士的邮票,再给我六倍数量的一便士邮票,余下的钱则用两便士半的邮票找给我。”片刻之间,这位小姐显得不知所措,不过她马上就豁然开朗了,于是带着微笑递上了正好满足这要求的邮票。你需要多长时间才能把这解决方案想出来呢?

2 并不成熟的早熟

一些年轻人的早熟现象十分令人吃惊。人们有时喜欢说:“你那孩子是个天才,他长大后肯定会干大事。”但是过去的经验告诉我们,这些孩子千篇一律地长成了十分普通的公民。与此相反,经常倒是这样的情况:愚钝的孩子长成了伟大的人物。你永远也说不出这是为什么。老天就是喜欢向我们展示这种有悖常理的怪事。众所周知,那些“速算神童”时而用他们的

① 奥利弗·温德尔·霍姆斯(Oliver Wendell Holmes,1809—1894),美国医生,诗人,散文家。——译者注

超凡事迹让世界惊叹不已，但是一旦教会他们关于算术的基本法则，他们这种神奇的本领顷刻全部丧失。

一个男孩正在津津有味地吃着一根粗大甜美的香蕉，一个年轻的朋友凑上前来，用羡慕的眼光注视着他，问道："你买这根香蕉花了多少钱，弗雷德？"他立即得到了回答，这回答是如此的不同凡响："那个卖我香蕉的人卖出十六罗[①]香蕉得到的六便士硬币的枚数，正好是他得到一张五英镑纸币而卖出的香蕉的根数的一半。"

现在，读者需要多长时间才能正确地说出，弗雷德为买他这珍奇而别有风味的水果到底付了多少钱？

3 在牲口市场上

三个乡下人在一家牲口市场上相遇了。"看好了，"霍奇对杰克斯说，"我把我的六头猪给你，换你的一匹马，这样你手头拥有的牲口数目就是我的两倍了。""如果这就是你做交易的风格，"达兰特对霍奇说，"那还是我把我的十四只绵羊给你，换一匹马，这样你拥有的牲口数目就是我的三倍了。""行了，我比这还要优惠，"杰克斯对达兰特说，"我给你四头奶牛，换一匹马，这样你拥有的牲口数目就是我手头的六倍了。"

这种用牲口交换牲口的贸易方式无疑是非常原始的，但是它提出了一道有趣的小题目，那就是求出杰克斯、霍奇和达兰特到底各带了多少头牲口到这个市场来。

---

① 罗，计数单位。1 罗 = 12 打，1 打 = 12 个。——译者注

4 关于远足的趣题

一群人一起外出，进行一次远足。他们相互召唤，结果结成了四伙——具体地说，25 个鞋匠一伙，20 个裁缝一伙，18 个制帽匠一伙，以及 12 个制手套匠一伙。他们一共花费了 6 英镑 13 先令。人们发现，五个鞋匠的花费相当于四个裁缝的花费，十二个裁缝的花费相当于九个制帽匠的花费，六个制帽匠的花费相当于八个制手套匠的花费。这道趣题是要你求出这四伙人每伙各花了多少钱。

5 奇怪的巧合

有七个人，名字依次是亚当斯、贝克、卡特、多布森、爱德华、弗朗西斯和格杰恩。近来他们迷于玩游戏。他们所玩的游戏叫什么名称，这无关紧要。他们约定，每当一人赢了一局，他就应该把其他每个人的钱翻一番。也就是说，其他每个人的口袋里原来有多少钱，他就要再给他们同样多的钱。他们玩了七局，说来真奇怪，每人轮着各赢了一局，而且是按着上面他们名字的给出次序。但是还有一个更奇怪的巧合——当游戏结束时，他们七人每人口袋里的钱正好一样多，都是两先令八便士。这道趣题是要你求出他们每个人在坐下玩游戏前身边各有多少钱。

6 一笔慈善遗赠

有一个人，给他的那些遗嘱执行人留下了话，要他们每年一次把不多不少五十五先令的钱布施给他堂区中的穷人。给女人们总是每人十八便士，给男人们总是每人半个克朗。但是只有当他们每年能用与前不同的样式来做这件事时，才可以

继续进行这项馈赠行动。这一善举能够施行多少年呢？当然，所谓“与前不同的样式”，是指受到施舍的女人们和男人们的数目与上一次不同。

7 寡妇应得的遗产

一位绅士最近去世，留下了一笔8000英镑的遗产，由他的遗孀、五个儿子和四个女儿分享。据他生前嘱咐，每个儿子应该得到每个女儿所得的三倍，每个女儿应该得到她们母亲所得的两倍。那么这位寡妇得到了多少遗产呢？

8 一视同仁的施舍

有一位仁慈的绅士，一天晚上在他回家的路上，先后遇到三个穷人向他求助。对第一个人，他给了自己口袋里钱的一半再加上一个便士；对第二个人，他给了自己当时口袋里钱的一半再加上两个便士；对第三个人，他递上了自己所剩钱的一半再加上三个便士。当他踏进家门的时候，口袋里只有一个便士了。现在，你能不能准确地说出当这位绅士开始向家里走的时候身边带有多少钱？

9 两架飞机

一个人最近买进了两架飞机，但是后来发觉它们不符合他的需要。于是他把它们以每架600英镑的价格卖了出去，这使得他在一架飞机上亏了20%，而在另一架飞机上赚了20%。他的这笔买卖从整体上说是赚了还是亏了？如果赚，那么赚了多少？如果亏，那亏了多少？

10 买礼物

“你猜上星期我在镇上遇见谁了，威廉兄弟？”本杰明大叔说，“是那个老吝啬鬼乔金斯。他家里人带着他到处转悠，购买圣诞节礼物。他对我说，‘为什么政府不能废除圣诞节？为什么不能让赠送礼物的行为受到法律的惩处？今天早上我出来的时候口袋里带着一定数量的钱，现在我发觉我正好花掉了其中的一半。事实上，如果你信我的话，我带回家的先令数目正好等于我带出来的英镑数目，而我带回家的英镑数目正好是我带出来的先令数目的一半。真是见鬼了！’”你能不能准确地说出乔金斯为买那些礼物花了多少钱？

11 自行车手的盛宴

那是在上一次的法定长假，我听人这么讲，
天清气爽有一伙人骑自行车出外游荡。
中午休息时分来到一家老牌的小酒坊，
大伙儿全都同意在一起大吃大喝图个爽。
“老板，把一切都开在一张账单上，”他们叫嚷，
“因为这笔钱将平摊到每个人的头上。”
这账单顷刻之间就在桌子上平躺，
结算下来那天总共花了四个英镑。
不过说来悲伤，正当他们就要付账，
却发现有两个家伙溜了出去胜利逃亡。
这样，每个留下来的老实人不得不多把血放，
除了应付的份额还要把两先令加上。
当然，他们后来同那两个混蛋算清了账。
但这伙自行车手出发时共有几人？还要请你想上一想。

12 关于钱币的一件怪事

不难算出,66 英镑 6 先令 6 便士等于 15 918 便士。现在,把这四个 6 加起来,得到 24;而把 15 918 中的各位数码加起来,也得到 24。奇怪的是,另外只有一个这样的金额,当用英镑、先令和便士把它正常表示出来时,也是重复地用着同一个数码,而把其中数码加起来得到的和,同样等于把这个金额单用便士表示时的各位数码之和。这个金额是多少呢?

13 一道新的钱币趣题

能用至少一个英镑、至少一个先令、至少一个便士和至少一个法寻实际支付的,而且用英镑、先令、便士正常表示时只用到从 1 到 9 这九个数码各一次的最大金额,是 98 765 英镑 4 先令 3 $\frac{1}{2}$便士。现在,请设法找出完全符合同样条件的最小金额。每种货币单位——英镑、先令、便士、法寻在实际支付时都必须有一定的数量,而且不可以用到 0。这道题目只需要小小的一点判断能力和思考能力。

14 钱的平方

“真奇怪,”麦克兰克先生对他的朋友说,“两便士加上两便士是四便士,而两便士乘以两便士也是四便士。”他认为可以用钱币乘钱币,这当然是错误的。乘数必须看作是一个抽象的数。不错,两英尺乘以两英尺得到四平方英尺。那么,两便士乘以两便士将类似地得出四平方便士!这会让读者感到困惑,他们会说“平方便士”是个什么东西啊。但是为了我们这道趣题,我们假定两便士乘以两便士就是四便士。现在问:哪两

个金额加起来的结果不但与把它们这样乘起来的结果相同,而且这个结果是除上面那个例子以外最小的?这两个金额不一定要相等,但它们必须能用我们王国目前流通的硬币支付。

15 口袋里的钱币

全部是用目前流通的银币[①](但没用四先令硬币)组成的,可以让我放进我口袋的,而不能被一枚半沙弗林(半英镑金币)所兑换的最大金额是多少?

16 百万富翁的困惑

摩根·G·布鲁姆加滕先生是个百万富翁,在美国以"蛤蜊大王"闻名。真是自作自受,他的钱财多得简直不知道怎么花才好。这很令他烦恼。于是他决定用钱去同他的一些贫穷但快乐的朋友捣个乱。他们从未做过有害于他的事,但是他却决心要把这"万恶之源"移植到他们身上。因此他打算把一百万美元分给他们,看着他们怎样迅速地堕落。但是他是个想法怪异又颇为迷信的家伙,他有一条不容侵犯的原则:从不进行不是一美元或美元数目不是7的幂——如7、49、343、2401——的馈赠。所谓7的幂,就是把若干个7乘起来得到的数。他的另一条原则是,他从不给多于六个的人同样多的金钱。那么,他会怎样分配这1 000 000美元呢?在这些给定的条件下,你爱把这笔钱分给多少人就分给多少人。

---

① 当时在英国流通的银币有三便士、六便士、先令(1先令)、弗罗林(2先令)、半克朗(2先令6便士)、双弗罗林(4先令)、克朗(5先令)这几种,四便士的银币在此前不久已停用。——译者注

17 伤脑筋的储蓄盒

有兄弟四人，名字分别叫约翰、威廉、查尔斯和托马斯。他们每人各有一个储蓄盒。这储蓄盒是在同一天给他们的，他们立刻把自己所有的钱都放了进去；只是因为这盒子不是很大，他们都先把钱兑换成了尽可能少的硬币。他们做完这些事之后，就把自己所存的数额相互说了。结果发现，如果约翰拥有的钱能比自己储蓄盒中现有的钱多上2先令，而威廉则少2先令，查尔斯能把自己的钱翻一番，而托马斯只有自己的钱的一半，那么他们各人拥有的钱正好一样多。

现在，我把这四个储蓄盒中的钱都加在一起，结果得到45先令，而且这些盒子中总共只有六枚硬币。这就变成了一道引人入胜的趣题：求出每个盒子中存放的到底是哪些硬币。

18 女售货员

一群女售货员以每磅一定的价钱（各人不同）卖出了她们各人不同的商品，结果每人都收到了同样数额的钱——2先令2便士1法寻。那么最多能有多少个女售货员？注意各人的每磅价钱必须能用目前流通的货币支付[①]。

19 除夕晚餐

伦敦一家小咖啡馆的老板给我说了一些有趣的数据。他说到他那儿愉快一下身心的顾客，如果是独身一人的女士，那么平均每人消费十八便士；如果是没有伴侣的男士，那么平均

① 似乎应该说得再明白一些：每人各卖出一种商品，而且卖出商品的重量都是整数磅。——译者注

每人消费半个克朗;如果是一位先生带着一位小姐,那么他将消费半个几尼。除夕那天晚上,他给二十五个人供应了晚餐,总共得到五英镑。现在,假定他对上面各种情况所说的平均值是有效的,那么那天晚上这些情况在他的客人中各占几例?当然,可以假定来这家咖啡馆的只有单身男士、单身女士和情侣(一位小姐和一位先生)这三种情况,因为我们没有考虑人数更多的情况。

20 牛肉和香肠

"我的一位邻居,"简大婶说,"以每磅两先令的价格买了一定重量的牛肉,又以每磅十八便士的价格买了同样重量的香肠。我向她指出,如果她把花的这些钱平分为两份,一份买牛肉,一份买香肠,那么她将在总重量上多出两磅。你能告诉我她到底花了多少钱吗?"

"这可不关我的事,"森尼博恩太太说,"但是一个女人愿意付这样的价钱,她在家政方面一定是不怎么有经验的。"

"我十分同意,亲爱的,"简大婶答道,"但是你看这并不是我们讨论的问题,至于那名商人的姓名和道德品质,更是没有关系了。"

21 一笔苹果交易

我花一先令向一个人买了一些苹果,但是它们太小了,因此我要他再加了两只。我发现这样一来,苹果的实际价钱比他的要价正好每打少了一便士。那么我用这一先令买了多少只苹果?

22 一笔鸡蛋交易

前不久,有一个人来到一家奶制品商店买鸡蛋。他需要一些不同质量的鸡蛋。店里有刚生下的鸡蛋,价钱高达每只五便士;有新鲜鸡蛋,价钱是每只一便士;有普通鸡蛋,每只半便士;还有用于竞选活动的鸡蛋,价钱就低得微不足道了。但是当时并无竞选活动,因此这最后一种鸡蛋对购买者毫无用处。不过,前三种鸡蛋他都买了一些,结果正好买了一百只鸡蛋,花钱是八先令四便士。现在,已知他买去的三种质量鸡蛋中,有两种质量的鸡蛋数目相同,那么确定出他每种价钱的鸡蛋到底各买了几只,就成了一道有趣的题目了。

23 圣诞赏钱

好几年之前,有一个人告诉我,他在圣诞赏钱上用掉了一百枚英国银币。他给每个人的钱都一样多,这不多不少一共花了他 1 英镑 10 先令 1 便士。你能不能告诉我,到底有多少人收到了他的赏钱?他又是怎样分配他的一百枚银币的?那个便士零头似乎很奇怪,但它完全正常。

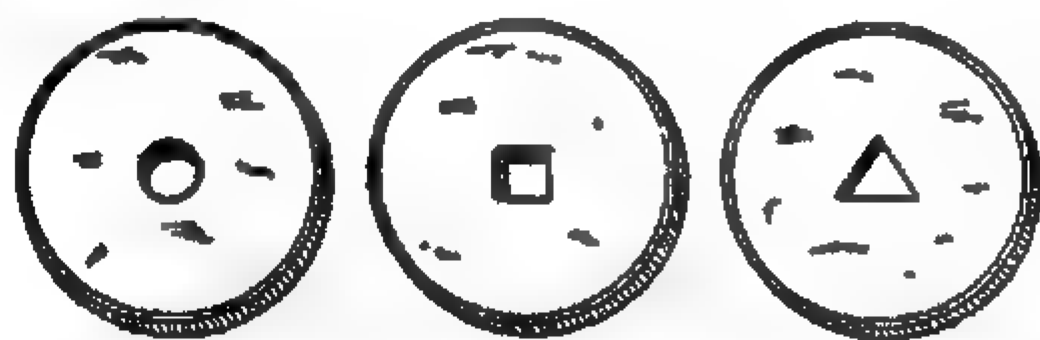
24 购物时的困惑

两位女士去一家商店购物。出于某种奇特的习惯,这家商店从不找零,而且规定一个人的购买总额要少于五先令。“你瞧,”一位女士说,“我发现我买的东西用我国目前流通的硬币来支付,总不能少于六枚。”另一位女士想了一下,惊叫起来:“真是太巧了,我也遇到了完全同样的问题。”“那么把我们两人的账单合起来付吧。”然而,令她们大吃一惊的是,她们仍然需要六枚硬币。那么她们两人的购物金额(已知互不相同)最少

各是多少[①]？

25 中国的钱币

中国人是一种古怪的人，他们用奇特的逆反方式做事。据说他们使用一种向上压的锯子而不是向下压的锯子；他们用刨子刨平一块松木板时是把这工具向自己拉而不是向前推；他们建造一幢房子时是先把房顶造好，然后把它升到设定的高度，再一层楼一层楼地往下造。在钱币方面，这个国家的流通货币是由价值浮动的银箔构成的。这银箔已变得越来越薄，现在2000张银箔堆起来也不到三英寸高[②]。通常的现金由不同厚度的铜币组成，它们在中心有着圆形的、方形的或三角形的孔，如我们下面给出的图。



这些铜币一般用线绳像钮扣那样串在一起。假定十一枚圆孔铜币值十五个清钱，十一枚方孔铜币值十六个清钱，而十一枚三角孔铜币值十七个清钱，那么在除了这三种铜币外其他什么货币都不能用的条件下，一个中国人怎样才能把我的半克朗兑换成零钱？已知一个清钱正好值两便士又十五分之四个清钱。

---

① 似乎应该加上一个条件——这家商店规定付款不能多于五枚硬币。这样在故事逻辑上才说得通，虽然这并不影响解题。另外要说明的是，当时两便士和四便士的硬币已停用。——译者注

② 显然杜德尼先生并不了解中国。不过这可能反映了上世纪初一般英国民众对当时积弱贫穷的中国的看法。如果说这里边有什么嘲笑中国人的意思的话，那么现在该嘲笑的倒是这种看法本身了。——译者注

26 初等职员的难题

有两个年轻人,名字很好听,一个叫莫格斯①,一个叫斯诺格斯②。他们被绞肉胡同的一名商人雇用为初等职员。按约定他们的薪金一样,都是头一年年薪 50 英镑,半年结算一次。以后莫格斯每年增加 10 英镑。斯诺格斯本来也是这样,但是出于某种与我们题目无关的理由,他要求最好改为每半年增加 2 英镑 10 先令。对此,他的雇主(或许他很通人情!)没有表示反对。

现在我们进入这道题目的正题。莫格斯每次拿到薪金,总是把其中固定比例的一部分存入邮政储蓄银行;斯诺格斯也是这样,但他的存钱比例是莫格斯的两倍。到第五年岁末,他们两人一共存了 268 英镑 15 先令。他们每人各存了多少?利息问题可以不予考虑。

27 找零钱

每个人都知道,找零钱经常会发生困难,而如果有个第三者能让我们借用一下他口袋中的少数几枚硬币,有时就会帮我们把事情摆平。这里是一个例子。一名英国人走进一家纽约的商店,买了价钱为三十四美分的商品。他身上只有一枚一美元硬币、一枚三美分硬币和一枚两美分硬币。那店主只有一枚半美元硬币和一枚四分之一美元硬币。但是正好还有一位顾客在场,当被请求给予帮助时,他拿出了两枚十美分、一枚五美分、一枚两美分和一枚一美分的硬币。店主怎样才能把零钱找给英

---

① 原文是 Moggs,与 moggy(猫咪)相近。——译者注
② 原文是 Snoggs,与 snog(接吻)相近。——译者注

国人？对于那些不熟悉美国硬币的读者，我们只要说明一美元等于一百美分就可以了。这种类型的趣题如果用一种合适的方法去解决，一般不会有什么困难。

28 熟视无睹

我们对小物件经常熟视无睹，我们的记忆很容易阴差阳错。有一位法官最近在审理一桩案子时说，他一点儿也记不起他是怎样把结婚戒指套到妻子手指上的。当你眼前一枚硬币也没有时，你能正确回答下列问题吗？一便士硬币的哪一面上印着发行日期？有些人是如此心不在焉，虽然他们在一生中的几乎每一天都要触摸硬币，但对这样一个简单的问题竟不知如何回答。如果我把一枚一便士硬币平放在桌子上，那么围着它我还可以放多少枚一便士硬币？要求这些硬币也是在桌子上平放，而且都要与第一枚硬币接触。当然，一位几何学家不需要做任何实验就会立即给出答案。他还将知道，既然所有的圆都是相似的，那么这个答案一定适用于任何硬币。下面这个问题如果向一伙人发问，并要求每个人把自己的答案写在一张纸条上，以使任何人都不会受到其他人的影响，将显得格外有趣。在一枚半克朗硬币的表面上，最多可以平放多少枚三便士硬币？这些三便士硬币既不能重叠，也不能超出半克朗硬币的边缘①。令人惊奇的是，对这个问题，人们得出的答案真是五花八门。只有很少的人给出了正确的答数。当然，必须在看不见这些硬币的情况下给出答案。

① 我国读者不妨用一元硬币和一分硬币分别代替这里的半克朗和三便士来考虑类似的问题。——译者注

29 破损的钱币

一个人有三枚硬币：一枚沙弗林、一枚一先令和一枚一便士。他发现每枚硬币都有破损，而失去的部分恰好都占同样的比例。现在，假定这些硬币的本身价值与它们的面额是一致的。这就是说，那枚沙弗林就是值一英镑，那枚先令就是值一先令，那枚便士就是值一便士。如果这三枚硬币的剩余部分加起来正好值一英镑，那么每枚硬币失去的部分占多大比例？

30 两个概率问题

有一类趣题，涉及所谓的概率论。大概没有什么其他类型的趣题能像这类趣题那样让人们接二连三地摔大跟头了。我将给出我所说的这类趣题的两个简单例子，它们真的十分容易，然而许多人都被它们绊得踉踉跄跄。最近，一位朋友拿出五枚一便士硬币对我说："同时抛掷这五枚便士，落下来后至少有四枚硬币都是正面朝上或都是反面朝上的机会是多少？"他自己的解答错得可以，但是正确的答案应该不难找到。另一个人解下面这道小趣题时得出了错误的答案，这道题我听他是这样说的："一个人将三枚沙弗林和一枚一先令放进一个袋子。如果让你从中摸出一枚硬币归你所有，你应该付多少钱？"当然，你我都知道，你摸得这四枚硬币中任何一枚的可能性是一样的。

31 家庭经济学

年轻的珀金斯太太从普特尼给我来信，信中这么说："最近，一道小小的算术题搅得我寝食不安。如果你能把答案讲给我听，我将非常高兴。情况是这样的：我们结婚只有短短的一段时间，现在，从建立家庭账务算起过了整整两年的时候，我丈

夫告诉我，他发现我们在房租、地方税和国家税上花了他年收入的三分之一，在日常开销上花了二分之一，在其他方面花了九分之一。他在银行里尚有结存 190 英镑。我知道后面这一点，是因为他那天忘了把他的银行存折收起来，让我偷看到了。难道你不认为丈夫应该把关于他钱财的所有秘密都告诉妻子吗？不管怎么说，我是这样认为的。然而——你会相信吗？——他从未告诉我他的收入到底是多少，而我，就是想知道，这非常合乎情理。根据我给你的数据，你能不能告诉我它是多少？"

不错，根据珀金斯太太信中的数据，当然能给出答案。但是我的读者们，如果不是提醒你们要注意的话，你们差不多人人都会宣称这收入是——一个比正确答案大得荒唐可笑的数额！

32 关于廉价车票的趣题

当那些煽情的大幅海报出现在这乡村小火车站上，宣布大英铁路公司将在圣诞节假日营运开往伦敦的廉价旅游列车时，马德利－坎特米茨的居民们真是激动万分。列车到达前半小时，小小的售票房里挤满了乡下旅客，他们都一心想到那个大都市去走亲访友。售票员从未见过这种阵势，弄得手忙脚乱。后来，他一边抹着他那颇具男子气的额头一边对我说，最令他感到棘手的是，这些乡巴佬竟然是用这么一大堆小零钱来买车票。

他说他拥有的法寻让伦敦西区[①]的一家布店用来找零钱的话，足可用上一个星期；他拥有的三便士硬币，让三个堂区教堂做礼拜还绰绰有余。"那种旅游车票的价钱，"他说，"是十九先令九便士。我很想知道，用我们王国当今流通的硬币组成这个

① 英国伦敦的西部地区，是王宫、议会、政府各部门的所在地，多大商店、剧院和高级住宅。——译者注

金额，到底能有多少种不同的方式。”

于是，这就是一道趣题：用我们当今流通的硬币支付十九先令九便士，可以有多少种不同的方式？记住，四便士硬币现在已经不用了。

33 便士换英镑

大多数人都知道，如果你任取一个用英镑、先令、便士正常表示的金额，其中英镑数（要求小于12英镑）大于便士数，把它们互换一下（把英镑改为便士，把便士改为英镑），求出原来金额与如此互换后的金额的差，再把差如此互换一下，又加上这个差，那么结果总是12英镑18先令11便士。现在，如果我们删去“小于12英镑”这个条件，并允许先令数和便士数可以为零，那么，（1）使上述规律不成立的最小金额是多少？（2）使上述规律成立的最大金额是多少？当然，若对14英镑15先令3便士这样的金额作互换，结果可以写成3英镑16先令2便士，它就是3英镑15先令14便士。

34 卖食品与卖布料

有一家农村商店，一半铺面卖食品杂货，另一半铺面卖布料。两面各有一名营业员。这两人可是冤家对头，他们都以接待顾客时手脚麻利而自以为了不起。食品杂货铺面的那个年轻人每分钟能称出两包一磅重的食糖，而卖布料的那名营业员每分钟能剪出三块一码长的布料。有一天生意清淡，老板就让他俩比试比试。他给卖食品杂货的营业员一桶食糖，要他称出四十八包一磅重的食糖；他又要卖布料的营业员把一匹四十八码长的布料剪成一码一块。比赛不时因接待顾客而中断，他们俩

一共被耽误了九分钟，但是卖布料的营业员被耽误的时间是卖食品杂货的营业员的十七倍。比赛结果如何？

35 贾金斯的牲口

海勒姆·B·贾金斯是得克萨斯州的一名牲口交易商，他有一些猪、一些牛和一些羊，分为五群，每群牲口数目一样多。一天早晨，他把这些牲口全部出手，卖给了八名交易商。每名交易商买进的牲口数目相同，价钱都是一头牛十七美元，一头猪四美元，一头羊两美元。海勒姆一共收进三百零一美元。他出手前最多能有多少头牲口？每种牲口有几头？

36 买苹果

由于只买少数几个苹果总是造成相当大的麻烦，我想还是就这个话题说上几句为好。我们都知道那个聪明男孩的故事，当他听那老妇人说她的苹果四个卖三便士时，就说："让我想想！四个卖三便士；那么三个卖两便士，两个卖一便士，一个就不要钱——我就拿一个！"

这种搅脑子的例子还有一些。例如，有一次，一个男孩在一个水果摊上挑了一便士的苹果，但当他得知这女摊主的梨子也是同样价钱时，就把手中的苹果换成梨子，换好转身便走。"站住！"女摊主说，"你还没付我梨子钱呢！""是的，"那男孩说，"当然不用付。我用苹果跟你换的。""但是苹果钱你也没付！""愿上帝保佑这个女人吧！你总不至于要我既付苹果钱又付梨子钱吧！"当这可怜的女人从一头雾水中清醒过来时，那男孩早已没有踪影了。

下面我们还有一个例子。一个男人给一个男孩六便士，并

答允只要这小家伙能把它变成九便士，他就再给他六便士。五分钟后那男孩回来了。“我已把它变成九便士了，”他边说边向他的恩施者递上了三个便士。“你是怎么完成这件事的？”那男人问他。“我买了三便士的苹果。”“但是这并没有使它变成九便士呀！”“我想它还是变成了，”那男孩答道，“那卖苹果的女人拿到了三便士，是不是？很好，我这里有价值三便士的苹果，而且我刚才还给了你三便士。这一共不是九便士又是什么？”

我引述这些例子只是想表明，这小男孩真是需要在买苹果的技巧上得到一点指导。因此我将给出一道关于这个贸易分支的简单题目。

一位老妇人有三种大小的苹果要卖——一种卖一便士一个，一种一便士两个，一种一便士三个。显然，第二种大小的苹果两个和第三种大小的苹果三个，分别相当于最大的那种苹果一个。现在，有一位绅士，膝下儿女成群，而且儿子和女儿一样多。他给他的孩子们七便士，要他们全部用来购买那老妇人的苹果。令人伤脑筋的是，要让每个孩子都公平地分配到一些苹果，这七便士该怎么用？而这位绅士共有几个孩子？

37 买栗子

虽然下面这道小趣题说的是买栗子的事，但它本身并不是那种陈腐的老故事[①]。这是一道全新的题目。初看上去，它显然属于那种“胡说八道逗你玩”的类型，但只要你考虑得当，它绝对没问题。

一个人到一家商店里买栗子。他说他要买一便士的栗子，

① 英语“栗子”chestnut，又义“陈腐的笑话”、“陈词滥调”等，故有此说。——译者注

结果他得到了五颗栗子。“这不够;我应该还有 a sixth,”他说道。“但是我再给你一颗栗子,”店主答道,“你就多拿 five 了。”好了,说来奇怪,他们俩都没错。这位顾客用半克朗能买到多少颗栗子?

38 偷自行车的贼

这里是一道搅脑子的小题目,它常常打扮成各式各样的面貌出现。一名自行车手买下了一辆自行车,价钱是 15 英镑。他拿出一张 25 英镑的支票付账。车店老板到隔壁的一位店主那儿把支票用现钱兑开,自行车手拿到他的 10 英镑找头后,骑车扬长而去,一眨眼便没了踪影。那张支票结果被证明是张空头支票,于是隔壁那位店主要求车店老板退还当初他收下的那笔钱。为此,车店老板不得不向一位朋友借了 25 英镑,因为那名自行车手忘了留下地址,找不到。现在,已知车店老板进那辆自行车花了 11 英镑,那么他一共损失了多少钱?

39 关于街头小贩的趣题

“你买这些橘子花了多少钱,比尔?”

“我可不想告诉你,吉姆。但是我砍了那老家伙的价,每一百个便宜四便士。”

“这样你得到了多少好处?”

“好吧,这意味着每十先令多了五个橘子。”

现在问:比尔买橘子实际上是按什么价钱付的款?只存在一种价格符合他的陈述。

年龄和亲属关系趣题

我们一生的年日是七十岁。

——《圣经·诗篇》第 90 篇第 10 节

几个世纪以来，把算术趣题用关于某人年龄的问题形式提出来，是一种特别受到青睐的做法。它们一般用代数就可以非常容易地解决，不过困难却往往在于把它们正确地表述出来。它们可能构造得非常复杂，可能需要相当的才能，但是没有一般的法则能够有效地给出它们的解法。解题者必须利用他们自己的聪慧。

说到关于亲戚关系或者说亲缘关系的趣题，十分令人奇怪的是，许多人觉得这些题目怎么这样难。即使在日常的谈话中，有些关于亲戚关系的话，在说话人心中是十分明白的，却让其他人的脑子立即变成了浆糊。像“他是我叔叔的女婿的妹妹”这样的话语，如果不加上一些详细而吃力的说明，对某些人来说绝对等于什么也没说。在这种情况下，最好的方法是草画一张家族系谱简表，这时眼睛就立即帮上了大脑的忙。如今，我们对血统的尊重已逐渐消失，大多数人已经没有迅速画出这种表的习惯了，这很遗憾，不然他们有时可以节省许多时间和脑汁。

40 妈妈的年龄

汤米：“妈妈，你有几岁啦？”

妈妈：“让我想一想，汤米。好了，我们三人的年龄加起来正好是七十岁。”

汤米："这是一个很大的年龄，是吗？那么爸爸，你有几岁啦？"

爸爸："正好是你岁数的六倍，我的儿子。"

汤米："我将来会不会有一天只有你岁数的一半，爸爸？"

爸爸："会的，汤米；当这一天到来的时候，我们三人的年龄加起来正好是现在的两倍。"

汤米："那么爸爸，假定我在你之前出生，假定妈妈把这一切都忘了，而且当我来到这儿的时候她又不在家，假定……"

妈妈："汤米，假定我们说到上床睡觉的事了。来吧，亲爱的。不然你要犯头痛了。"

好吧，如果汤米再长大几岁的话，他可能会根据他父母给他的信息算出他们的准确年龄。你能求出这位妈妈的准确年龄吗？

41 他们的年龄

"我丈夫的年龄，"那天一位女士说道，"可以用我年龄中的数码倒序表示。他年龄比我大，而且我们的年龄之差是年龄之和的十一分之一。"

42 子女们的年龄

最近，当斯迈利夫妇接待好叔叔的来访时，这对溺爱孩子的父母把他们的五个孩子一一带到他面前。最先来到的是比利和小格特鲁德，叔叔被告知，这男孩的年龄正好是这女孩的两倍。接着来到的是亨里埃塔，据介绍她和格特鲁德的年龄之和等于比利的两倍。然后查利跑了过来，这时有人说这两个男孩的年龄之和正好是那两个女孩年龄之和的两倍。叔叔正要对

这些巧合表示惊奇时,珍妮特进来了。“啊哈! 叔叔,”她大叫,“你正好在我二十一岁生日时来了!”对此斯迈利先生添上了最后一句令人晕眩的话:“对了,现在这三个女孩的年龄之和等于那两个男孩年龄之和的两倍。”你能给出每个孩子的年龄吗?

43 廷普金太太的年龄

埃德温:“你知道吗? 十八年前廷普金太太结婚的时候,廷普金先生的年龄是他妻子的三倍。而如今,他正好是她的两倍。”

安杰利娜:“那么结婚那天廷普金太太几岁呢?”

你能回答安杰利娜的问题吗?

44 关于人口普查的趣题

乔金斯先生和太太一共有十五个孩子,都是隔一年半出生一个。埃达·乔金斯小姐是其中年龄最大的。她不愿意向人口普查人员说出她的年龄,但她承认她的年龄正好比小约翰尼大七倍。小约翰尼是这些孩子中年龄最小的。埃达的年龄有多大? 不要急匆匆地以为你已经解决了这道小题目。你可能会发现你犯了个愚蠢的大错!

45 母亲与女儿

“母亲,我希望你能给我一辆自行车,”那天,一个十二岁的女孩这么说道。

“我认为你的年龄还没有足够大,我亲爱的,”这是母亲的回答,“当我的年龄只是你的三倍时,你就会有一辆的。”

现在,这位母亲的年龄是四十五岁。这位年轻的姑娘可以

期望在什么时候得到母亲的礼物?

46 玛丽与马默杜克

马默杜克:"你知道吗?亲爱的,还有七年时间我们的年龄之和就是六十三岁了。"

玛丽:"这是真的吗?然而有一个事实是,当你是我现在这个年龄的时候,你年龄是我当时的两倍。这是我昨晚算出来的。"

好,玛丽和马默杜克的年龄是多少?

47 罗弗的年龄

"好了,那么汤米,罗弗有几岁了?"米尔德里德的男朋友问她的弟弟。

"啊,五年前,"这小伙子这样回答,"姐姐的年龄比这条狗大四倍,但是现在她年龄只是它的三倍了。"

你能说出罗弗的年龄吗?

48 关于汤米的年龄

汤米·斯马特最近被送到一所新学校念书。到校的第一天,老师问他年龄是多少。下面就是他那奇特的回答。"好,你看,情况是这样的。当我出生的时候——我忘了是哪一年——我唯一的姐姐,安妮,她年龄正巧是我母亲的四分之一,而她现在的年龄是爸爸的三分之一了。""你说的都对,"老师说,"可是我要的不是你姐姐安妮的年龄,而是你自己的年龄。""我刚才正要说到这一点呢,"汤米答道,"我的年龄正好是母亲现在年龄的四分之一,而再有 4 年时间,我的年龄就是父亲的四分

之一了。你说好玩不好玩?”

这就是老师能从汤米·斯马特那儿得到的所有信息了。根据这些事实,你能不能说出他的年龄到底是多少?当然,这里稍稍有点搅脑子。

49 隔壁邻居

在图廷贝克这个地方,有两家人家门挨门住着——贾普一家和西姆金一家。贾普一家四口人的年龄加起来是一百岁,而西姆金一家人的年龄加起来也是这个数。人们发现,在每个家庭中,把每个孩子年龄的平方同母亲年龄的平方加起来得到的和,等于父亲年龄的平方。然而,在贾普这家中,朱莉娅比她弟弟乔大一岁;而索菲·西姆金比她弟弟萨米大两岁。这八个人的年龄各是多少?

50 一袋果仁

一袋果仁,作为圣诞礼物送给了三个男孩,说好他们应当与他们的年龄成比例地分享这些果仁。他们的年龄之和是 $17\frac{1}{2}$ 岁。现在这袋子中有 770 颗果仁,而赫伯特每拿四颗罗伯特就拿三颗,赫伯特每拿六颗克里斯托弗就拿七颗。这道趣题是要求出各人拿了多少颗果仁,这些男孩年龄各是几岁?

51 玛丽几岁了

这里是一道好玩的年龄小趣题,它是由已故的萨姆·劳埃德提出来的,在美国很流行。你能解开其中的谜团吗?

玛丽和安妮的年龄合起来是四十四岁。玛丽的年龄是安妮

过去某个时候年龄的两倍,那时玛丽的年龄是安妮将来某个时候年龄的一半,而到将来那个时候,安妮的年龄将是玛丽过去当她年龄是安妮年龄的三倍时的年龄的三倍。玛丽几岁了?题目就是这样,但你能把它解出来吗?如果不能,就请你的朋友来帮你解决,当他们耗尽心力理着问题中盘根错节的关系时,你可以看到他们是怎样变成灰头土脸的。

52 奇怪的血缘关系

“说到血缘关系,”堂区长在某次聚餐会上说道,“我们的立法者们正在把婚姻法变成可怕的一团乱麻。例如,这里有个搅脑子的案例,引起了我的注意。兄弟两人娶了姐妹两人。一个男人死了,另一个男人的妻子也死了。后来仍活着的两人就结婚了。”

“这男人娶了他已故妻子的姐妹,是根据最近通过的法案?”律师插问道。

“一点不错。因此,根据民法,他的婚姻是合法的,他的孩子是婚生的。但是,你看,这男人是这女人已故丈夫的兄弟,因此,同样根据民法,她不能同他结婚,她的孩子是私生的。”

“他娶了她,而她没有嫁给他!”医生说。

“正是如此。而且孩子是他父亲的婚生子,却是他母亲的私生子。”

“毫无疑问,‘法律是头蠢驴’[①],”演员大声叫道,“如果允许我可以这样说的话。”他补充了一句,并向律师鞠了个躬。

“当然可以,”这就是回答,“我们律师就是尽最大努力把这

---

① 这句话出自英国作家狄更斯的名著《雾都孤儿》。——译者注

头畜牲驯得为人类服务。我们的立法者要对人种的优良性负责。"

"这使我想起一件事,"堂区长继续说道,"我堂区中有一个男人娶了他遗孀的姐姐,这个男人……"

"停一下,先生,"教授说,"娶了他遗孀的姐姐?你堂区中死人也结婚?"

"不,但我到后面再作解释。好了,这个男人自己有一个妹妹。他们的姓名是斯蒂芬·布朗和简·布朗。上星期一出现了一个年轻的家伙,斯蒂芬对我介绍说这是他的 nephew。于是我说到简的时候很自然地把她称作他的 aunt。然而,令我惊讶的是,这名青年纠正我的说法,斩钉截铁地向我说,虽然他是斯蒂芬的 nephew,但绝不是斯蒂芬妹妹简的 nephew。这让我十分困惑,但他说的一点都没错。"

律师首先抓到了这个谜团的关键。他的解答是什么呢?

53 在地铁上听到的

第一位女士:"那么他是你的亲戚啰,亲爱的?"

第二位女士:"哦,是的。你看,那位绅士的母亲是我母亲的婆婆,但是他和我爸爸关系不怎么样。"

第一位女士:"哦,不见得吧!"(然而你可以看出她不是很知趣。)

这位绅士与第二位女士是什么亲戚关系呢?

54 一次家庭派对

在某次家庭派对上,有 1 个爷爷,1 个奶奶,2 个父亲,2 个母亲,4 个子女,3 个孙辈,1 个兄弟,2 个姐妹,2 个儿子,2 个

女儿,1 个公公,1 个婆婆和 1 个媳妇。你会说,一共二十三个人。错了。这里只有七个人。你能不能说明怎么会有这种情况的?

55 混合亲戚

约瑟夫·布洛格斯:"我跟不上,我亲爱的孩子。它都让我头晕目眩了!"

约翰·斯诺格斯:"这很简单。再听一遍!你是我父亲的内弟,又是我弟弟的岳父,还是我岳父的弟弟。你看,我父亲……"

但是布洛格斯先生拒绝再听下去。读者能不能说明怎么会有这种三位一体的奇特亲戚关系?

56 威尔逊的难题

"全是些看不懂的事……"威尔逊先生坐在铁路旅馆的商务间里,边说边把一本杂志扔在了桌子上。

"谁在那儿说看不懂的事?"斯塔布斯先生询问道。

"嗯,请自己看吧,如果你想确切了解的话——我刚才突然想起,或许你们三人会对一件同我有关系的小事情感兴趣。"

今天是圣诞夜,而这四名旅行推销员却在格拉斯敏斯特度这个假日。可能他们每人都在怀疑其他人无家可归,或许他们每人都意识到自己事实上正是处于这样一种困境。不管怎样,他们看上去都显得十分地心泰神安,而当他们聚拢在这欢快跳跃着的炉火周围时,也就天南地北无所不谈了。

"有什么难点吗?"帕克赫斯特先生问。

"这件事当中没有什么难点,只要你予以正确理解。它是

这样的。一个名叫帕克的人有一架飞行器，可以乘载两人。他是那种喜欢冒险的家伙——鲁莽，我应该这么说他——他想找一个愿意冒生命危险陪他上一次天的人，一时上又找不到，这令他有点儿烦恼。然而，我的一个叔叔认为他可以一试，于是在一个晴朗的早晨，他在这飞行器上就坐，飞行器正常起飞了。当他们升到大约一千英尺的时候，我的侄子突然……"

"这里打住，威尔逊！你侄子在那儿干什么？你说是你叔叔，"斯塔布斯先生打断了他。

"我说了吗？好吧，这没关系。我侄子突然转脸对帕克说发动机运转不正常，于是帕克对我叔叔喊了起来……"

"瞧这个地方，"沃特森先生插了进来，"我们越来越糊涂了。是你叔叔还是你侄子？让我们确定下来，非此即彼。"

"我说的一点也没错。帕克对我叔叔喊了起来，要他做这件事那件事的，这时我侄子……"

"你又来了，威尔逊，"斯塔布斯大叫，"干脆，我们是不是应该认为你叔叔和你侄子都在那架飞行器上？"

"是啊。我想我把这已说得很清楚了。我说到哪儿了？对了，我侄子对帕克回喊道……"

"嗬！很抱歉又一次打断你，威尔逊。但是我们不能这样继续下去。这架飞行器真的只能乘载两人吗？"

"那当然。我一开头就说它只能乘载两人。"

"那么从浮空学的角度，你说那上面有三个人是什么意思？"斯塔布斯先生大叫。

"谁说那上面有三个人？"

"你刚才告诉我们，帕克、你叔叔和你侄子乘着这该死的飞行器在天上飞着。"

"对。"

“而这东西只能乘载两人。”

“也对。”

“威尔逊，我认识你已经有一些时候了，你是个诚实的人，温和的人。”斯塔布斯先生说，态度很严肃。“但是自从你接手那种新产品以来，我怕你是劳累过度了。”

“停一下，斯塔布斯，”沃特森先生插了进来，“我清楚地知道我们大家是在哪儿出毛病的。当然，威尔逊，你的本意是让我们意识到帕克不是你叔叔就是你侄子。现在你只要告诉我们帕克是你叔叔还是你侄子，我们就没有疑问了。”

“他同我什么亲戚关系也没有。”

那三个人神情不安地相互看着，摇头叹息。斯塔布斯先生从椅子上站起身来去拿火柴，帕克赫斯特先生不停地给自己的手表上发条，沃特森先生拿过拨火棍，侍弄起炉火来。这是个令人尴尬的时刻，因为在这个充满良好祝愿的节日里，没有人愿意把自己心中真正的想法告诉威尔逊先生。

“真奇怪，”威尔逊先生说，态度非常慎重，“而且有点儿令人悲哀，一些人的脑袋怎么这么愚钝。你们似乎并没有理解这里的事实真相。看来你们当中任何一个人都从来没想到过，我的叔叔和我的侄子是同一个人。”

“什么！”那三个人一起惊叫了起来。

“是的，戴维·乔治·林克莱特是我的叔叔，而且他又是我的侄子。因此，我同时是他的叔叔和侄子。很奇怪，是吗？我来说明一下这情况是怎么会出现的。”

威尔逊先生把这情况解释得十分简单明了，让那三个人看到它是怎样可以在不需要任何违禁婚姻的条件下发生的。或许读者自己也能完成这件事。

时钟趣题

看着这钟!

——《印戈耳支比家传故事集》

在考虑一些关于钟和表,以及由其指针在给定条件下所标示的时间的趣题时,应该时刻把一个特殊的约定牢记心中。经常是这样的情况,作出解答需要假设指针居然能够标示一个含有小于一秒之时段的时间。这样的一个时间,当然在实际上是无法标明的。这么说,我们的趣题是不是就不能解了?用一个逻辑上的三段论推理出来的结论,其真实性依赖于那两个假设的前提,在数学中也是这样。某些事情事先就假设好了,而答案完全依赖于那些假设的真实性。

“如果有两匹马,”拉格朗日说道,“能够拖运一定重量的负荷,那么很自然就会假设四匹马能够拖运的重量是翻一番,六匹马能够拖运的是那重量的三倍。然而,严格地说,实际情况并非如此。因为这个论断基于这样一个假设——那四匹马的拖运量和用力方向完全相同,而这种情况在实际上几乎是不可能有的。因此,我们经常被我们的主观认定导致与现实相去甚远的结论。但是这一缺陷并非数学之缺陷,因为数学还给我们的,总是而且正是我们当初置于其中的。根据那个假定,马匹数与拖运量的比率是恒定的,结论是在那个假定的基础上得出的。如果假定不真实,那么结论势必是不真实的。”

如果一个人能用六天收割完一块田里的庄稼,那么我们说两个人将用三天就能收割完,而三个人将用两天干完这活。就像在拉格朗日的马的例子中,我们在这里假设,所有的人都有完

全相同的劳动能力。但是我们再比这多假设一些。因为当三个人聚在一起时，他们可能闲聊，也可能玩闹，因而浪费了时间；或者从另一方面考虑，一种竞争的精神可能激发出他们更大的干劲。我们可以在一道题目中愿意假设什么条件就假设什么条件，只要它们能被清晰地表达出来并让人们充分理解，而答案将依据这些条件而得出。

57 那时是什么时间

“我说，拉克布兰，现在是什么时间？”那天，一个熟人问我们的教授朋友。回答显然很奇特。

“如果你把中午到现在的时间的四分之一加上从现在到明天中午的时间的一半，你就会得到现在的准确时间。”

那天当教授说这话时是什么时间？

58 关于时间的趣题

如果三时到离现在五十分钟前所经过的时间是现在到六时的时间的四倍，那么现在到六时有多少分钟？

59 一只伤脑筋的表

一位朋友掏出一只表说道：“我的这只表不能准确走时，我得时时看着它。我注意到这分针和时针每六十五分钟就重合一次。”这只表是快了还是慢了？每小时快多少或慢多少？

60 沃普肖码头疑案

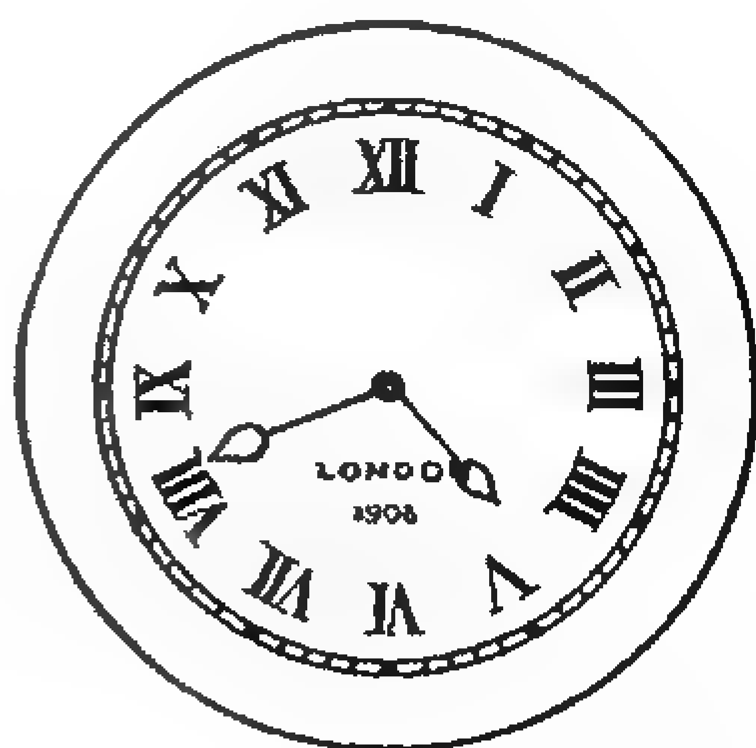
1887年1月12日清晨，下泰晤士街上人声嘈杂，一阵骚乱。原来，当沃普肖码头的一些职员赶早前来上班时，他们发

现保险箱被撬开了，一笔相当可观的金钱被拿走了，办公室里一片狼藉。值夜的看守不见了，到处找也没找着，但是了解他的人没有一个对他有片刻的怀疑，这次盗窃绝不会是他干的。这个信念不久便得到了证实：这天晚些时候，老板们得到通知，这可怜家伙的尸体被水上警察打捞了起来。某些由暴力造成的标记指明了这样的事实：他受到了野蛮的攻击，被扔进了河里。在他口袋里找到了一只表，这表停了，就像在这种情况下总会发生的那样，这可是个确定暴行发生时刻的有价值的线索。但是一个愚蠢至极的警官（而在人类最为聪明的群体中，我们总会发现一两个愚蠢的个人）把表的指针转了一圈又一圈，说是要让这表再走起来，实际上是自己转着玩。当他由于这个严重的错误而被狠狠地训了一顿之后，他被问到是不是能想起这表刚发现时所指示的时间。他回答说他想不起来了，但他总算回忆起那时时针和分针正好重合，一根在另一根的上面，而秒针刚刚走过四十九秒处。除此他再也回忆不出什么了。

当这看守的表停下的时候准确的时间是多少？当然，假设这是一只极其精确的表。

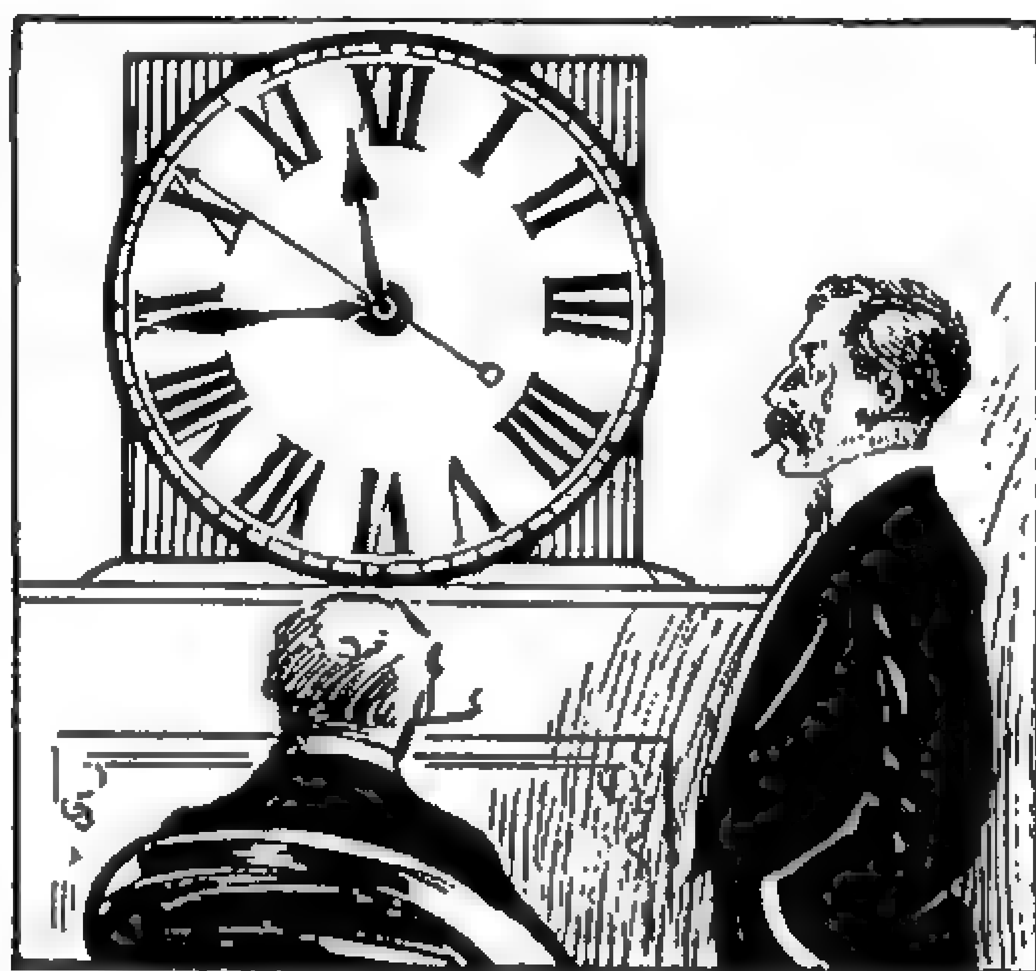
61 交换位置

右边这个钟面上，指示着 4 时 42 分稍稍不到一点。到 8 时 23 分稍稍过一点的时候，指针将再次指着正好同样的点。事实上，指针不过是交换了一下位置。从下午三时到午夜十二时这段时间内，一个钟的指针要交换多少次位



置？在所有这些相互呈位置交换的一对对时刻中，分针最靠近点Ⅸ的准确时刻是什么？

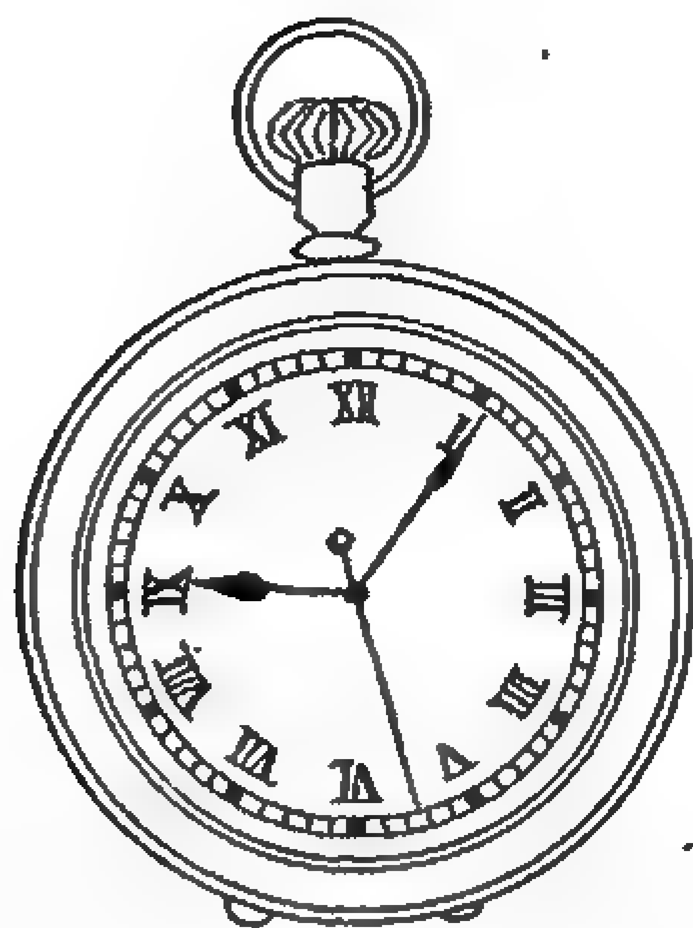
62 俱乐部的钟



那天晚上，思想者俱乐部的一台大钟上被发觉停了。钟停时，如你在插图上所看到的，秒针刚好处在另两根指针的正中间。一名俱乐部成员对他的几个朋友提出，他们应该说得出下一次当秒针又处在分针和时针的正中间时（假定这钟没有停）的准确时刻。你能求出发生这种情况时的正确时刻吗？

63 跑　表

我们这里有一只三针跑表（见下页）。秒针一分钟在表面上走一圈，它就是那根在靠中心的顶端有一个小环的指针。我们的表盘上指示着表的主人揿停它时的准确时刻。你会注意到这三根指针几乎是等距的。时针和分针所指的点正好把圆周分出了三分之一，但是这秒针稍有一点儿走过了头。这三根指



针要准确地做到等距是不可能的。现在，我们想知道下一次这三根指针走到相隔距离正好与图示的同样是什么时刻。你能说出这时刻吗？

64 三只钟

在1898年4月1日星期五这天，有三只钟精确地在同时——都是中午十二时——开始走动。到第二天中午十二时，人们发现A钟走时准确，B钟正好快了一分钟，而C钟则正好慢了一分钟。现在，假定B钟和C钟都没有被校正，但是这三只钟都被允许像一开始那样继续走下去，而且它们都保持着不变的前进速度，一刻也不停，那么到哪一天的哪个时刻这三对指针将再次同时指着十二时？

65 火车站的钟

一只钟挂在一个火车站的墙上，长71英尺9英寸，高10英尺4英寸。这是那堵墙的尺寸，不是钟的尺寸！在等火车

的时候,我们注意到这钟的两根指针指着相反的方向,而且平行于那堵墙的一条对角线。这时的准确时间是多少?

66 乡下呆子

一个好开玩笑的人正在乡间赶一段很长的路程,突然看见一个乡下人坐在一个台阶上。由于这位绅士对自己走的路线不太有把握,因此他想他应该向当地的住户打听一下;但是初一打量,他过于性急地作出了这样一个结论:他遇到了一个乡下白痴。于是他决定测试一下这个家伙的智力,方法是首先出一个他能想到的最简单的问题来问他。这问题是:"今天是星期几呀,先生?"下面是他得到的机智回答:

"当后天是昨天时,今天距星期日的天数与当前天是明天时的今天距星期日的天数一样多。"

读者能说出那天是星期几吗?很显然,这位乡下人并非像看上去的那样是一个呆子。而这位绅士,作为一个心中充满困惑的人,但也作为一个更有见识的人,继续赶他的路。

运动与速度趣题

快跑的未必能赢。

——《圣经·传道书》第9章第11节

67 平均速度

最近，在一次坐汽车出行中，我们发觉：我们去时的速度是每小时十英里，虽然我们的回程仍然走原来的路线，但速度却是每小时十五英里，这是由于一路上行人车辆比去时少了。那么平均速度是多少？你在回答这道简单的小问题时，不要过于性急，否则你肯定会出错。

68 两列火车

我把这个小问题提给一位火车站站长，他是如此迅捷地给出了答案，这让我确信，我们完全没有必要到美国或其他什么地方去寻觅铁路管理人才。

两列火车同时出发，一列是从伦敦到利物浦，另一列是从利物浦到伦敦。如果它们在交会后分别经过一小时和四小时到达了目的地，那么一列火车比另一列火车快多少？

69 三个村庄

那天我坐一辆汽车从阿克里菲尔德出发到巴特福德去，但是由于认错了路，我走的是一条途经奇斯伯雷的道路。奇斯伯雷距离阿克里菲尔德比距离巴特福德更近一些，它位于我应该走的那条直接道路的左边十二英里处。到达巴特福德后，我

发觉我走了三十五英里。这三个村庄之间的三段距离(它们都是整数英里)是多少?我或许应该提一下,这三条道路都是笔直的。

70 领抚恤金

“说到怪人,”一位在政府部门任着某个职务的绅士说,“我所知道的最奇怪的人物是一个又老又残的寡妇。她每个星期都要爬上一座山去那乡村邮局领取她的抚恤金。她以每小时一英里半的速度爬上去,又以每小时四英里半的速度返下山,这样的一个来回一共花了她正好六个小时。你们谁能告诉我从那座山的山脚到山顶有多远?”

71 都铎的埃德温爵士



在上页这张素描插图中，我们看到都铎的埃德温爵士正要去营救他的情人，美女伊莎贝拉。她被邻近的一个坏贵族劫持。埃德温爵士计算了一下，如果他以每小时十五英里的速度骑行，他将提前一个小时过早地到达那座城堡，而如果他以每小时十英里的速度骑行，他将落后正好一个小时而过晚地到达那儿。现在，头等重要的事情是，他应该按指定的时间准时到达，以保证他所计划的营救行动获得成功，而约好的时间是五时，那个时候这位被劫持的姑娘将正好在用她的傍晚茶。这道趣题是要准确地求出都铎的埃德温爵士跑的路得有多远。

72 水上飞机问题

海滨小镇斯洛科姆的居民们因某一位飞行员的来访而激动万分。全镇万人空巷，都去观看那奇妙的水上飞机做飞行表演。当然，多布森和他一家人也在其中。汤米少爷状态良好，他告诉他父亲，英格兰人比苏格兰人和爱尔兰人更适于做飞行员，因为英格兰人不那么重。“你怎么得出这个结论的？”多布森先生说。“好吧，你看，”汤米答道，“确实，在爱尔兰有科克[①]人，在苏格兰有埃尔[②]人，这仍然是比较适合的。但在英格兰，却有着‘驳船’[③]。”不幸的是，这种说法得向多布森太太解释，于是它反被贬得一无是处。这水上飞机的飞行表演是从斯洛科姆到邻近的海滨胜地普德尔维尔，距离是五英里。但是一股强大

---

① 原文是 Cork，爱尔兰郡名和该郡首府名。但英语中 cork 又有“软木”的意思，软木质轻而浮于水。这里是双关。——译者注

② 原文是 Ayr，苏格兰郡名和该郡港口城市名。但 Ayr 与 air（空气）完全同音。这里也是双关。——译者注

③ 原文是 lightermen，即 lighterman 的复数形式，意思是“驳船”，但从词的构成看，似乎也可解为“更轻的人”。也是双关。——译者注

的风帮了飞行员很大的忙,使他在去程上只花了短短的十分钟,不过,这也使他在飞回斯洛科姆的出发点时,一路上顶风飞行,花了他一个小时。现在,如果是一点风也没有,这来回十英里路程要花去他多长时间?当然,这架水上飞机的发动机始终都在平稳地工作着。

73 赛 驴

有一次到海边旅游的时候,汤米和伊万杰琳一定要在沙滩上进行一次一英里的骑驴比赛。多布森先生和他在海滩上遇到的几个朋友就做裁判。但是,由于驴子们是老相识,一路上始终不愿分离,结果不可避免地发生了同时到达终点而不分胜负的情况。不过,守在赛道上各点(每隔四分之一英里设一个点)的裁判注意到了以下的结果:走前四分之三英里用了六又四分之三分钟,前半英里所用的时间与后半英里相同,而第三个四分之一英里所用的时间与最后一个四分之一英里正好相同。根据这些结果,多布森先生十分得意地求出了这两头驴子走完这一英里所用的时间。你能给出答案吗?

74 捡马铃薯

一个人有一个篮子,里面盛着五十个马铃薯。他向他的儿子提议,作为一个小游戏,请他把这些马铃薯放到地上排成一直线。第一个和第二个马铃薯之间的距离要求是一码,第二个和第三个之间是三码,第三个和第四个之间是五码,第四个和第五个之间是七码,如此等等——每放一个马铃薯就增加二码。然后又要这孩子把它们捡回来,一次捡一个,放进那篮子里,而篮子就放在第一个马铃薯的旁边。这孩子要完成把所有马铃薯

都捡回来这一壮举,必须要跑多长的路?我们不考虑放这些马铃薯所跑的路程,因此是当所有马铃薯都放好后从他由篮子那儿出发算起。

75 乘客的车费

初看之下,你几乎不会想到在下面这个有关一个小巧合的问题中会有引起争议的事,然而涉及此事的两个人只用了很少的一点时间就达成了一致意见。史密瑟先生租了辆汽车,把他从阿德尔福德带到克林克维尔再回来,价钱是3英镑。车开到巴肯汉姆,正好是路程的一半时,他遇到一个熟人汤普金斯先生,并同意带他到克林克维尔,然后在回程时再把他带回巴肯汉姆。史密瑟先生应该向这位乘客要多少钱呢?这是个问题。对汤普金斯先生来说,合理的车费该是多少呢?

数码趣题

九大名人便是他们的称号。

——德莱顿[①]:《花与叶》(*The Flower and the Leaf*)

我让这些关于那九个数码的趣题自成一类,是因为我一直认为平时对它们考虑不够,它们应该得到更多的考虑。这些题目中所涉及的定律,看来很少被人们普遍知晓,只有"舍九法"技巧除外。然而,了解这些数码的一些性质是很有用的,这通常会使我们掌握一些验算方法,这些方法在节省工作量方面具有真正的价值。我仅举一例——它最先跳进我脑海。

如果我们要求一位读者判断 15 763 530 163 289 是不是平方数,他该从何处着手呢?如果这个数的最后一位数码是2、3、7或8,那么他当然会知道它不可能是平方数。但是,在这个数的表现形式上没有什么东西可以否定它是一个平方数。我猜测在这种情况下,他会叹上一口气或发出一声抱怨,着手进行开方运算这种艰辛的劳动去了。然而,如果他曾经对数的数码性质研究有过一小点儿注意,他就会用下面这种简单的方法解决这个问题。这个数的各位数码之和是59,59的各位数码之和是14,14的各位数码之和是5(我称之为"数码根"[②]),因此我知道这个数不可能是平方数,而且就是根据这个理由。平方数从1

---

① 约翰·德莱顿(John Dryden,1631—1700),英国桂冠诗人,剧作家,批评家。有的文学史家把他创作的时代称为"德莱顿时代"。——译者注

② 其实,一个正整数 a 的数码根 b 就是这个数被9除所得的余数,用数论中的同余式表示,就是 $a \equiv b \pmod 9$,其中 $0 \leqslant b < 9$。——译者注

开始顺序排下去，它们的数码根总是1、4、7或9，而不可能是其他什么东西。事实上，平方数序列的数码根序列是序列1，4，9，7，7，9，4，1，9的不断重复，直至无穷。同样，三角形数$\left(\text{即可表示为}\frac{n+n^2}{2}\text{形式的数}\right)$的数码根序列是1，3，6，1，6，3，1，9，9的不断重复。于是，我们这儿有了一个类似的否定检验：如果一个数的数码根是2、4、5、7或8，那么它不可能是一个三角形数。

76 一桶啤酒



一个人买了几桶葡萄酒和一桶啤酒。这些酒桶中的酒有多有少，它们都显示在插图中，酒桶上标记的是桶中所装酒的加仑数。他把一定量的葡萄酒卖给了一个人，又把两倍于这个量的葡萄酒卖给了另一个人，仅把那桶啤酒留给了自己。这道趣题是要你指出那个酒桶装的是啤酒。你能说出是哪一个吗？当然，这个人是整桶买进整桶卖出，对桶中所装的东西没有做过任何动作。

77 数码与方阵

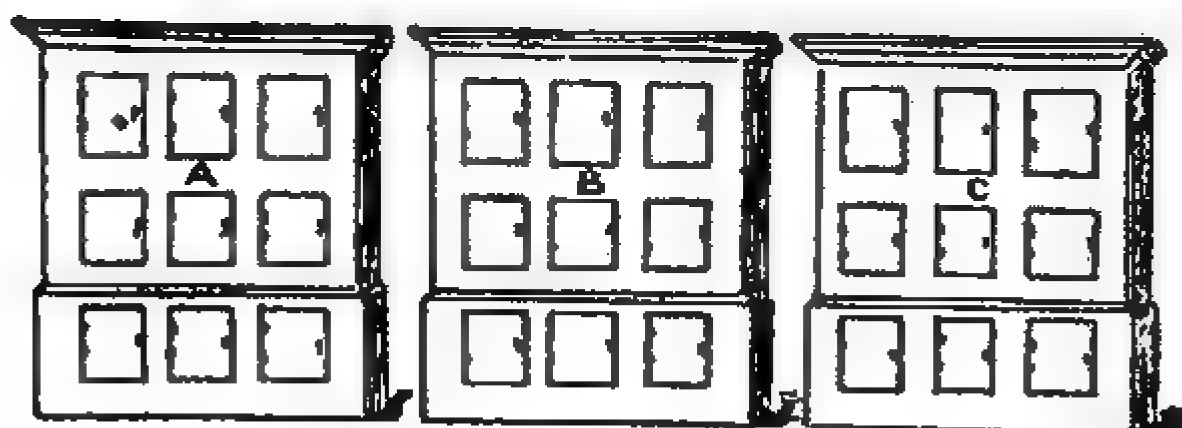
1	9	2
3	8	4
5	7	6

在图中可见,我们把那九个数码安排在一个方阵中,使得方阵第二行数码拼成的数是第一行数码拼成的数的两倍,而且底行拼成的数是顶行拼成的数的三倍。还有三种安排数码的方法,可以产生同样的结果。你能把它们找出来吗?

78 奇数码与偶数码

奇数码,就是1、3、5、7、9,加起来是25;而偶数码2、4、6、8加起来只有20。设法对这些数码做些拼合,使得奇数码拼成的数加起来与偶数码拼成的数加起来都一样大。不允许有复数、假分数和循环小数。

79 锁柜趣题



有一个人,在他的办公室里有三个大橱,每个大橱有九个锁柜,如图所示。他吩咐他的办事员,在大橱A的每个锁柜

上各放一个不同的一位数，而且对大橱 B，以及对大橱 C，都如此办理。由于我们这里允许称 0 是一个数码，也没人禁止办事员把 0 用作一个数码；因此他在为每个大橱放置数码时显然有权从那十个数码中任选一个不予使用。

现在，这个老板并没有说过要把这些锁柜按某种数字顺序编号，但当这件事完成后，他还是吃惊地发现，这些数码全被打乱，放置得毫无章法。他叫来那办事员，要求给出一个解释。这个行为怪怪的小伙子说道，他当时起了这样一个念头，在每个大橱上把数码安排得形成一个简单的加法直式，上面两行数字加起来得出位于最底下一行的和。但是最令人称奇的一点是，他把它们安排得大橱 A 上的加法给出了最小的和，大橱 C 上的加法给出了最大的和，而且三个和中的九个数码各不相同。这道趣题是要求表明这件事怎样才能做成。不允许使用循环小数，0 也不可以出现在百位上。

80 三组数码

下面这道发表在《数学新年刊》(*Nouvelles Annales de Mathématiques*)上的趣题，是从我的《坎特伯雷趣题集》(*Canterbury Puzzles*)中的一道题目经过修改而得来的。将九个数码分为三组，一组两个，一组三个，还有一组四个，使得用前两组数码各自拼成的数乘起来等于用第三组数码拼成的一个数。例如，$12\times483=5796$。我现在提出还要把“一、四、四”这种情况包括进来，例如 $4\times1738=6952$。你能把这两种情况下的所有解答都求出来吗？

81 九枚筹码

①⑤⑧　⑦⑨
②③　④⑥

我们有九枚筹码,每枚筹码上各写有1、2、3、4、5、6、7、8、9这九个数码中的一个。我把它们在桌子上摆成两组,如图所示,使得它们形成两个乘法直式,而且它们给出相同的积。你会发现,158乘以23等于3634,而79乘以46也等于3634。现在,我提出的这道趣题是要求重新摆放这些筹码,使得算出的积尽可能地大。怎样用最好的方式来摆放它们?记住,两组数码必须乘出同样的结果,而且必须一组是三个筹码乘以两个筹码,另一组是两个筹码乘以两个筹码,就像现在这种情况。

82 十枚筹码

在这个问题中,除了用到1、2、3、4、5、6、7、8、9之外,我们还要用到0。这道趣题就像上一道那样,是要求把这十枚筹码摆放得使两个乘式的积相等,而且你这里可在乘数里用一个数码和两个数码,任你选择。上面所说的是一件非常容易的事;但是还要求找出两种摆放样式,它们分别给出最大和最小的积。当然,每枚筹码都必须用到,而且0不可以放在一行数码的最左边,放在那里是不起作用的。普通分数和小数也是不允许的。

83 数码乘法

这里还有一道引人入胜的题目,它涉及那九个数码,0被排除在外。把每个数码用上一次且仅一次,我们能构成两个

乘法算式，它们的积相同，而且这件事能以多种样式做到。例如，7×658 和 14×329 包含了所有的数码，每个数码用到一次，而且两种情况下的积相同——都是 4606。现在，你会看到积的数码和是 14，它在这样能得到的数码和中既不是最大的也不是最小的。我们的问题是给出最小的公共积数码和，你能求出它的解答吗？还有给出最大的数码和的问题，你也能解决吗？

84 小丑的趣题



图中的这名小丑站在那儿做着一种代表乘号的姿势。他是在指明这样一个奇特的事实：15 乘以 93，结果产生了恰恰同样的数码（1395），只是排列顺序不同。这道趣题是要你凭你喜欢任取四个数码（各不相同），并且同样摆放它们，使得在小丑一边形成的数乘以在小丑另一边形成的数时，将产生同样这些数码。做成这件事的方式非常少，我将给出所有合适的情形。你能把它们都找出来吗？你可以在小丑的每一边各放两个数码，正如我们的例子所示，也可以在一边放一个数码而在另一边放三个数码。如果我们只用到三个数码而不是四个数码，那么合适的方式只有：3 乘以 51 等于 153，6 乘以 21 等于 126。

85 出租车号码

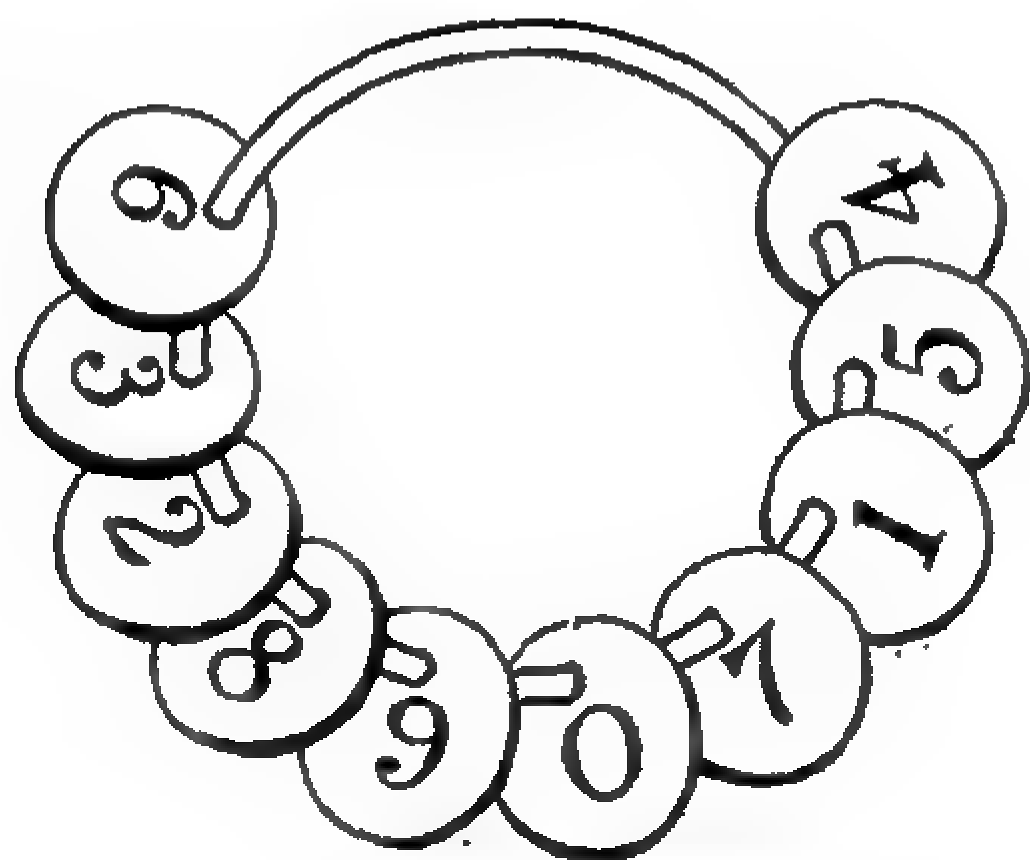
一天夜晚，伦敦的一名警察看见两辆出租车形迹可疑，但它们朝着相反的方向开走了。这位警官是个特别细心警觉的人，于是他拿出袖珍笔记本，要记下出租车的号码，但是他发现他的钢笔丢了。不过幸运的是，他找到了一小段粉笔，于是他用粉笔把这两个号码记在附近一座码头的大门上。当他巡逻了一圈回到同一地点时，他停住脚又对这两个数看了一下，他注意到这样一个奇特的现象：所有九个数码（不包括0）都用上了，而且没有一个数码重复，但是如果他把这两个数乘起来，它们还是产生这九个数码，每个数码用到一次，而且仅用到一次。当清晨一名职员来码头上班时，他看到了这粉笔记录，于是把它们仔细地擦了个干净。由于那位警察记不起它们是什么号码了，因此就请教某几位数学家，问是不是有什么已知的方法可以找到具有那警官所注意到的奇特性的所有数对；但是他们什么也不知道。不过，这项研究倒是很有趣，于是我们从众多的问题中选出下面这个问题：怎样的两个数，一共包含了所有九个数码，当把它们乘起来时，将产生另一个也包含了这九个数码的（最大）数？0在任何地方都不允许用到。

86 奇特的乘法

如果我把51 249 876乘以3（于是把所有九个数码各用上一次且仅一次），我得到153 749 628（它又包含了所有九种数码，一个数码用到一次）。类似地，如果我把16 583 742乘以9，结果是149 253 678，其中都是把所有九种数码全用上。现在，把6取作你的乘数，试着排列余下的八个数码，使得乘出一个包含所有九个数码，一个数码出现一次且仅一次的数。你会

发现这道题远不是那么容易，但它是做得出来的。

87 关于签到牌的趣题



每当什么地方有一批工人被一个建筑工地录用时，总要按惯例给每个工人发一块小圆牌，上面写着这工人的工号。当工人们前来上班时，就要把这些牌子挂在一块大木板上，作为核查是否准时上班的签到牌。好，我有一次注意到，一个工头从木板上拿走了一些签到牌，把它们串在一个钥匙圈上，放进他口袋里。这立即给了我构作一道好趣题的灵感。事实上，我要向我的读者吐露，构作趣题的灵感就是这样发生的。你不可能真正创造一个灵感：它是偶然发生的——而你必须保持警觉，在它就是这么发生的时候抓住它。

从插图可见，一个钥匙圈上串着十块这样的签到牌，号码是从 1 到 9，以及 0。这道趣题是要求在任何一块牌子都不能取离钥匙圈的条件下把它们分为三组，使得第一组拼成的数乘以第二组拼成的数等于第三组拼成的数。举例来说，我们可以把它们分成这样三组：2—8 9 0 7—1 5 4 6 3，方法是把 6 和 3 沿钥匙

圈挪到4那头，但很不幸，前两组乘起来不能得出第三组。你能不能对它们做一个符合要求的划分呢？当然，在任何一组中，签到牌你喜欢有多少就可以有多少。这道趣题需要某种超常的智力，除非你有瞎蒙蒙对的运气。

88 数码除法

这里又有一道好趣题。它要求把那九个数码(0排除在外)分成两组，并各拼成一个数，使得一个数被另一个数除时能得出一个事先给定的数，而且没有余数。例如，13 458除以6729给出2。读者能不能找到同样可以分别得出3、4、5、6、7、8和9的分组及拼法？他还能不能在每种情况中找到一对最小的数？举例来说，同我们已给出的其他例子一样，14 658除以7329对预定要给出的数2来说也是一个正确的答案，但数字更大了。

89 加数码

如果我写下987英镑5先令$4\frac{1}{2}$便士这个金额，把其中的数码加起来，那么它们总计是36。这样，无论是在那金额中还是在加得的数码和中，没有一个数码被重复用到。这是在这种条件下的最大金额。现在，请找出相应的最小金额，而且用硬币具体给出这个金额时，英镑、先令、便士、法寻都要有一定的数量。你选择哪几个数码就哪几个数码，不一定要用到全部九个数码，但是无论何处数码都不可以重复。0也不允许使用。

90 关于一百的趣题

你能不能把那九个数码各用上一次且仅一次，把 100 写成一个带分数的形式？已故法国杰出数学家卢卡[①]找到了七种能做到这一点的不同方式，并对还有其他方式的可能性表示了怀疑。事实上，恰有十一种方式，就这些了。其中有一种是 $91\frac{5742}{638}$。其余方式中，有九种也是整数部分有两位数码，但第十一种的整数部分仅一位数码。读者能不能找出这最后一种？

91 进一步的带分数问题

我首次发表我对上题的解答时，不由自主地试图用包含那九个数码的带分数来依次表示 100 以下的所有正整数。这里有 12 个数，供读者一试身手：13、14、15、16、18、20、27、36、40、69、72、94。在每种情况中，那九个数码均用到一次，且仅一次。

92 数码拼成平方数

这里将九个数码如此拼排，使它们形成四个平方数：9、81、324、576。现在，你能不能把它们放在一起形成一个单一的平方数？——(1)最小的是什么数？(2)最大的是什么数？

93 神秘的十一

你能不能找出含有十个数码（将 0 也称为数码）中的九个，且能被 11 整除而不留下余数的最大数？你能不能找出用

---

① 爱德华·卢卡(Edouard Lucas，1842—1891)，法国数学家，擅长数论和数学游戏，以判定素性的卢卡判据而闻名。——译者注

同样方法构成的、且能被 11 整除的最小的数？这里有一个例子，其中没有用到的数码是 5：896 743 012。这个数含有那些数码中的九个，且能被 11 整除，但它不是我们所要求的最大数或最小数。

94 数码构成一百

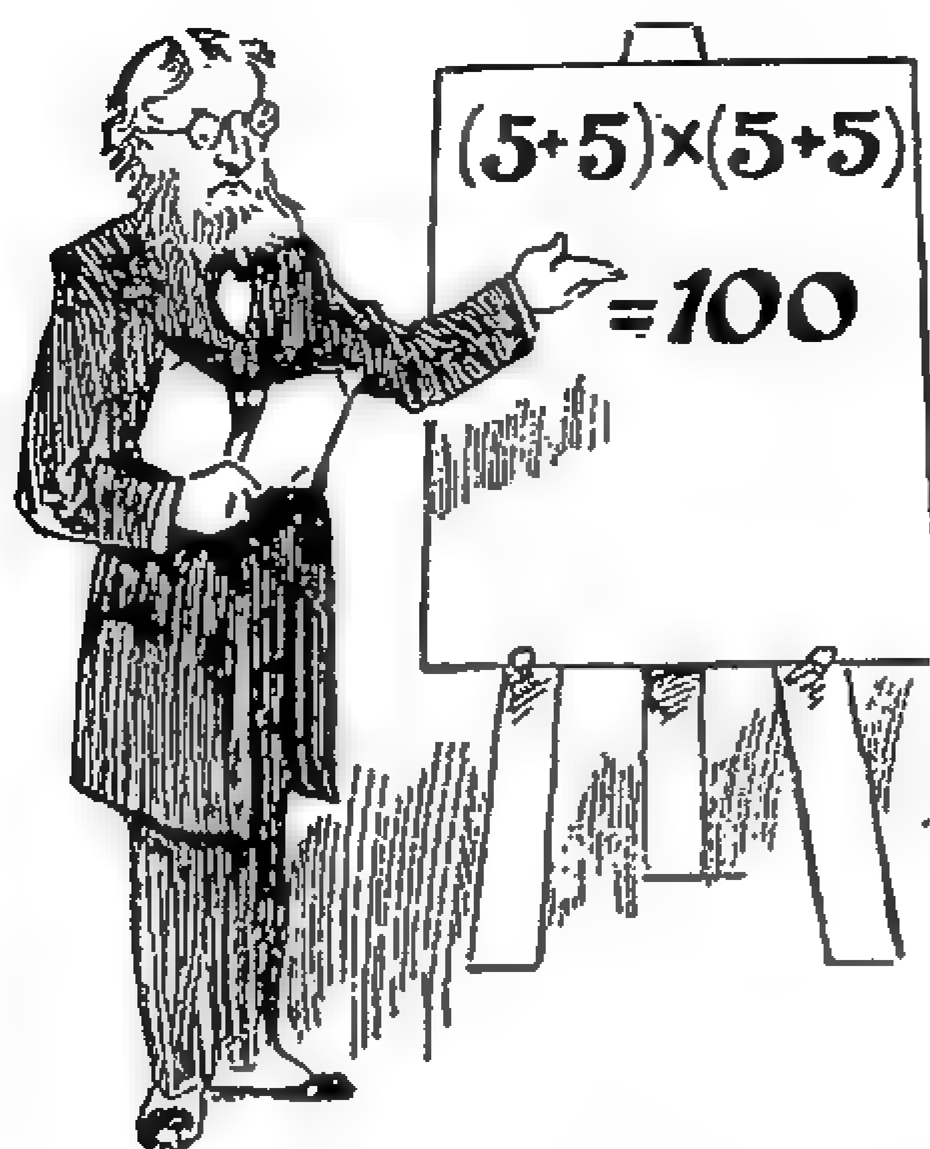
1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

现要求在这九个数字之间放上算术符号，使得它们运算下来等于 100[①]。当然，你不能改变这些数字目前这种按数值大小排列的状态。你能不能给出一个正确的解答，而且用了 (1) 最少的符号，以及 (2) 最少的笔画？也就是说，必须尽可能少地使用符号，而且这些符号要有最简单的形式。例如，加法和乘法的符号（+和×）算作两画，减法的符号（－）是一画，而除法的符号（÷）是三画，等等。

95 四个七

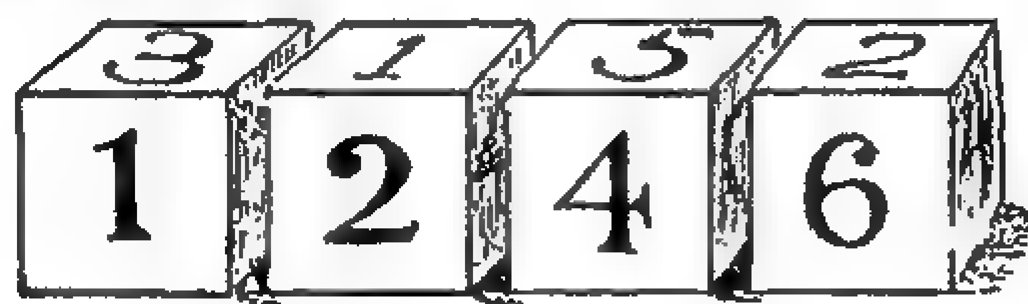
在下页的插图中，我们看到拉克布兰教授正在讲解那种小难题中的一道。他习惯于用这种方式让他班上的学生感到快乐。他相信，促使他的学生们打破常规思路，他就能更好地保证他们的注意力，启发原创而巧妙的思想方法。瞧，他刚刚演示了怎样把四个 5 加上一些简单的算术符号写下来以表示 100。每一位青少年读者一眼就可以看出，他的例子正确无误。现在，

① 根据后面的答案，也可以在某些空档内不放符号，从而把相邻的数码拼起来作为一个多位数。——译者注



他要你们做的事是：将四个7（不多也不少）加上算术符号进行拼排，使得它们运算下来等于100。如果他说的是要用四个9，那么我们会立刻写下99 $\frac{9}{9}$，但是这四个7却需要相当的机智。你能发现其中的小花招吗①？

96 骰子上的数



我有一副骰子，共四只。上面的标记不是通常所用的点子，而是阿拉伯数字，如图所示。当然，每只骰子上都是1到

① 请读者注意西方的小数记法与中国的稍有不同。——译者注

6 这六个数字。把这四只骰子放在一起，可以拼成许许多多不同的数。图中它们就拼成了 1246 这个数。现在，如果我把所有可用这些骰子拼成的不同四位数都摆出来（在任何一个数中，同样的数字不能放上一个以上），它们加起来等于多少？你可以把 6 倒过来，让它表示 9。我不是要求或者说我不是期望读者竭尽全力列出所有这些数，然后把它们加起来。人生有限，不要如此浪费能量。你能用其他方法得到答案吗？

五花八门的算术和代数问题

丰富多彩是生活的真正香料，
它散发着它所有的芬芳。

——柯珀[①]:《任务》(*Task*)

97 桌子上的点子



最近，有一名男孩从学校回到家中，想给他的父亲展示一下他的大器早成。如图所示，他把一张大圆桌推到房间的角落，使它靠住角落两边的墙。然后他指着桌子远端边上的一个墨水点。

“这里有一道难题让你解，爸爸，”这年轻人说，“这个点到一面墙的距离正好是八英寸，而到另一面墙是九英寸。你能不能不用测量就告诉我这桌子的直径？”

---

① 威廉·柯珀(William Cowper,1731—1800),英国诗人。其诗赞美乡村生活和自然风光，诗风朴素平易。——译者注

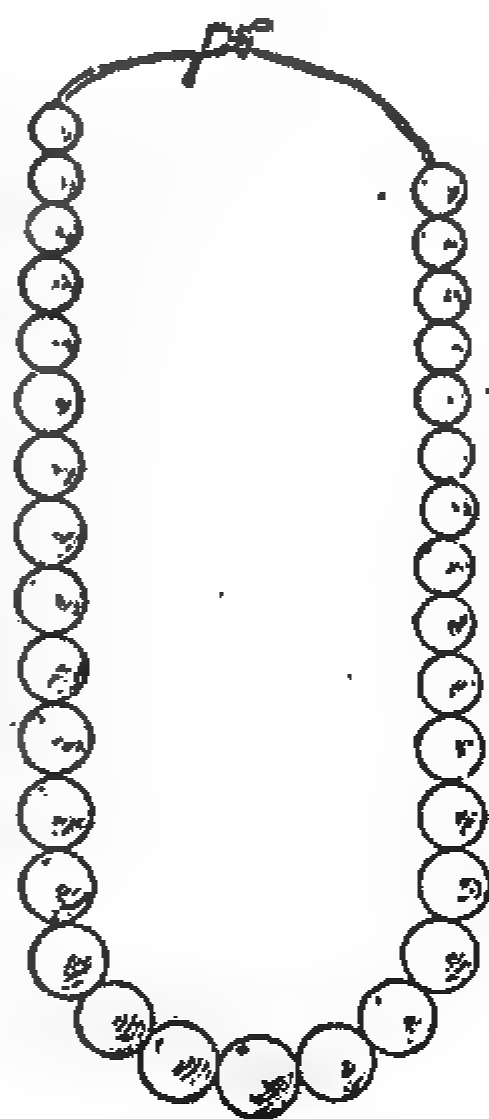
我无意中听到这孩子对一个朋友说，“这道题把我老爸彻底打败了。”但据说他父亲对伦敦城的一个老熟人说，他用心算在一分钟内就把这事解决了。我一直想知道哪一种说法符合事实。

98 学校的礼节

某一所男女同校的学校，在反复教育学生要彬彬有礼方面可说独树一帜。在每天早晨的校会上，他们有一种奇特的规矩。这里女生的人数是男生的两倍。每个女生要对每个其他的女生、每个男生，以及那位教师[①]鞠一个躬。每个男生要对每个其他的男生、每个女生，以及那位教师鞠一个躬。在这所模范学校，每天早晨总共要鞠九百个躬。好了，你能不能准确地说出这所学校里有多少个男生？如果你不是很仔细的话，你很可能会计算出一个很大的数。

99 三十三颗珍珠

“我认识一个人，”特迪·尼科尔森在某次家庭派对上说，“他有一串珍珠，共三十三颗。居中的那颗是其中最大的，也是最好的。其他的珍珠是这样挑选出来排列的：从一端开始顺序下去，每颗珍珠的价值都比它前面那颗高 100 英镑，直到那颗最大的珍珠；从另一端开始，珍珠的价值以 150 英镑的差价递增，直到最大的那颗。



① 这所学校只有一位教师。——译者注

整串珍珠价值 65 000 英镑。最大的那颗珍珠价值多少?”

“珍珠项链和其他衣着用品,”当这珍宝的价钱被算出后,沃尔特大叔说,“使我想起了亚当和夏娃。你们可能不知道,专家学者们在亚当和夏娃所吃苹果的数目上意见分歧。一些人的观点是,夏娃 eight(8 个),亚当 two(2 个)①,总共只有 10 个。但是某些数学家算出了不同的结果,他们坚持认为,夏娃 eight(8 个),亚当 eight(8 个)②,总共 16 个。然而最近有研究者认为,上述数字完全错了。这是因为,如果夏娃 eight(8 个),亚当 eight two(82 个)③,那总共得是 90 个。”

“唔,”哈里说,“在我看来,如果昔时多伟人的话,那么很可能是夏娃 eight one(81 个),亚当 eight two(82 个)④,这将给出 163 这个总数。”

“我根本不同意,”莫德说,“在我看来,如果夏娃 eight one(81 个),而亚当 eight one two(812 个)⑤,那么他们一起大嚼了 893 个。”

“我断定你们全错了,”威尔逊先生坚决地说,“因为我认为夏娃(吃了)eight one four(814 个)亚当(之果),而亚当(吃了)eight one two four(8124 个)夏娃(之果)⑥,因此我们得到 8938 这个总数。”

---

① 这段文字纯属搞笑。主要是利用 eight(8)与 ate(吃)同音,two(2)与 too(也)同音,下面还有 four(4)与 for(为了)的同音,有意曲解,造成笑话。如这句,按读音,也可理解为“夏娃吃了,亚当也是”,《圣经》上原意如此。——译者注

② 按读音,也可理解为“夏娃吃了,亚当吃了”。——译者注

③ 按读音,也可理解为“夏娃吃了,亚当也吃了”。——译者注

④ 按读音,也可理解为“夏娃吃了 1 个,亚当也吃了(1 个)”。——译者注

⑤ 按读音,也可理解为“如果夏娃吃了 1 个,而亚当也吃了 1 个”。——译者注

⑥ 按读音,此句也可理解为“夏娃为亚当吃了 1 个,而亚当也为夏娃吃了 1 个”。——译者注

“不过,瞧我的,”赫伯特插进来说。“如果夏娃(吃了)eight one four(814 个)亚当(之果),而亚当(吃了)eight one two four two(81 242 个)帮夏娃的忙[①],总共当然得是 82 056!”

这时候,沃尔特大叔建议大家可把这个问题搁一搁。他宣布这显然是一个数学家所谓的不定问题。

100 工人的趣题

拉克布兰教授在一次闲逛时,偶然遇到一个人在挖一个深洞。

“早晨好,”他说,“这洞有多深?”

“猜一下,”这工人回答,“我的身高恰好是 5 英尺 10 英寸。”

“你准备还要挖多深?”教授说。

“我还要挖现在的两倍深,”他回答,“到那时,我的头低于地面的距离是现在它高出地面的距离的两倍。”

拉克布兰现在问你能不能说出这洞挖好后有多深。

101 干草捆

农场主托普金斯有五捆干草。在把它们交给一位客户之前,他吩咐手下霍奇称一称它们的重量。这个愚蠢的家伙却用了所有可能的组合方式把它们两捆一称,然后他告诉主人称出的重量以磅为单位分别是:110、112、113、114、115、116、117、118、120 和 121。现在,农场主托普金斯应该怎样根据这些数字

---

① 按读音,此句也可理解为“夏娃为亚当吃了 1 个,亚当也为帮夏娃的忙而吃了 1 个”。——译者注

算出这五捆干草的每一捆单独重多少？读者可能首先想到，他应该知道“哪两捆是哪两捆”，或者诸如此类的信息，不过这完全是不必要的。你能正确地分别给出这五捆干草的重量吗？

102 格宾斯先生如坠五里雾

格宾斯先生是一位勤勉的商人。有一天伦敦大雾，给他带来诸多不便。电灯正好也坏了，他不得不用两支蜡烛勉力工作。他的账房先生向他保证，虽然这两支蜡烛长度一样，但一支可点四小时，另一支可点五小时。他工作了一段时间后，就把蜡烛熄了，因为大雾散了。这时他注意到，残留下来的蜡烛，一支的长度正好是另一支的四倍。

喜欢好趣题的格宾斯先生那天晚上回家后，自言自语地说，“今天这两支蜡烛点了多长时间，这当然是可以算出来的。我来试试看。”但是他很快就发现自己如坠五里雾，那雾比真正的雾还要浓。你能帮他摆脱困境吗？这两支蜡烛点了多长时间？

103 漆灯杆

蒂姆·墨菲和帕特·多诺万被当地行政部门雇用，去某条马路油漆路灯杆。蒂姆习惯早起，他首先到达工作地点干了起来。当他在马路南边漆好三根灯杆的时候，帕特出现了。他指出按承包合同蒂姆应该漆马路北边的灯杆。因此蒂姆只好到马路北边从头干起，而帕特在南边接手干下去。帕特把他这边的活儿干完后，就过马路帮蒂姆漆了六根灯杆，于是这项工作全部完成。由于这条马路两边的灯杆数目相同，因此问题很简单：谁漆的灯杆多？多几根？

104 抓　　贼

“好吧，警察先生，”被告的律师在对证人进行反诘问时说，“你说当你开始追捕这名刑事被告的时候，他正好从你那儿跑出了二十七步?”

“是的，先生。”

“而且你肯定地说他每跑八步你只跑五步?”

“正是如此。”

“那么警察先生，如果是这种情况的话，我要求你，作为一个有智力正常的人，解释一下你怎么会抓到他的。”

“行，你听好了。我的步子较长。事实上，我跑两步的距离等于这被告跑五步的距离。如果你用心算一下，你会算出我跑到我抓住他的地方需要多少步。”

这时陪审团团长要求给他们几分钟时间，以算出这警察所跑的步数。你是不是也能说出这警察抓住窃贼需要跑多少步?

105 行政堂区委员会选举

这儿是一个为新手准备的容易问题。在泥沼小镇的上一次行政堂区委员会选举中，共有二十三名候选人，竞选九个席位。每个投票人有资格投票选举这些候选人中的九人或更少数目的人。有一位选举人想知道他有多少种可能的不同选法。

106 糊涂城的选举

在糊涂城的上一次议会选举中，共计投出有效票 5473 张。自由党以多于保守党 18 票、多于独立党 146 票、多于社会党 575 票的优势而当选。你能不能给出一个简单的算法来算出各竞选党获得了多少选票?

107 妇女参政主义者的会议

在妇女参政主义者最近召开的一次秘密会议上，发生了严重的观点分歧，结果导致了这一团体的分裂，只有一部分人留了下来。“我刚才是半想走半想留，”女主席说，“如果我走了，那么我们这个团体当中三分之二的人都退出了。”“不错，”另一名成员说，“如果我刚才能说服我的朋友怀尔德太太和克里斯廷·阿姆斯特朗留下来，那么我们只失去一半人马。”你能说出这会议刚开始时有多少人出席吗？

108 闰年女士[1]

在上一个闰年中，闰年女士们不失时机地行使了向男性求婚的权利。如果我从一个秘密渠道得到的数字是正确的话，那么下面的叙述描绘了这件事在我国的情况。

有许多女士提出了求婚，她们每人都是提出一次，其中八分之一是寡妇(widow)。结果，有不少男子结了婚，其中有十一分之一是鳏夫(widower)。在向鳏夫提出的求婚中，有五分之一遭到拒绝。所有寡妇的求婚都被接受。四十四分之三十五的寡妇嫁给了单身汉(bachelor)。一千二百二十一名独身女子(spinster)的求婚被单身汉所拒绝。被单身汉接受的独身女子的人数是被单身汉接受的寡妇的七倍。这些就是我所得到的全部详情。现在问你，有多少女士提出了求婚[2]？

---

① 西方习俗，只有在闰年，女性才可向男性求婚。在闰年求婚的女性被称为“闰年女士”。—— 译者注

② 这道题目的难点在于其中某些指称用词的界定，故特将有关的英文原文附上，供读者参考。——译者注

109 夺糖大战

一家人家的五个男孩在吃完饭后偶然发现了一包糖豆。这是一份十分意外的战利品，于是一场争夺战随之发生。我将精确地描述这场争夺战的全部细节，因为它构成了一道有趣的难题。



你瞧，安德鲁竭尽全力把这包糖豆的三分之二拿到手。鲍勃马上把其中的八分之三夺了过来，查利也设法抓到了十分之三。接着年龄较小的戴维冲上场，把安德鲁手中剩下的糖豆全部缴获，但是其中七分之一却被埃德加用一个阴谋诡计巧妙地弄了去。现在这场游戏要玩真格的了，因为安德鲁和查利联手向鲍勃发动了攻击，鲍勃绊在火炉围栏上，把他所有糖豆的一半都撒落了。这些糖豆被戴维和埃德加捡起，一人一半，这两个家伙刚才爬到了桌子底下，在那儿等着呢。接着，鲍勃从一张椅子扑到查利身上，把后者到手的东西全部打翻在地。对于这份馈赠，安德鲁只得到了四分之一，鲍勃拾起了三分之一，戴维得到了七分之二，而查利和埃德加把剩货对半分了。

他们正在想这场冲突该结束了，不料戴维突然同时向两个方向出击，把鲍勃和安德鲁刚刚所得糖豆的四分之三打翻了。后两者好不容易收回了其中的八分之五予以平分，但其余三人每人拿走了这份糖豆的五分之一。现在每粒糖豆的下落都已交代清楚，他们宣布休战，并把包中剩下的糖豆平分了。一开始这些糖豆的可能数目最小是多少？每个男孩得到的糖豆是多少？

110 隐修院院长的趣题

第一位青史留名的英格兰趣题家是一名约克郡人——不是别人，就是坎特伯雷隐修院的院长阿尔昆[①]。这里是从他著作中摘录的一道小趣题，至少它的古董性也可让我们感到有趣。“假如有 100 蒲式耳的谷子要分配给 100 个人，分配方式是：每个男人分得三蒲式耳，每个女人二蒲式耳，每个儿童半蒲式耳。这里有多少个男人，多少个女人，多少个儿童？”

好了，如果我们不算女人人数为零的情况，那么一共有六个不同的解答。但是让我们加一个条件：女人的人数正好是男人的五倍。那么正确解答是什么呢？

111 割麦子

一名农夫有一块正方形的麦田。麦子全部熟了，正等收割，但是他缺人手，于是经商定，这个活儿由他和他的儿子一人干一半。农夫首先沿着这正方形的四周割了一杆宽的一圈，这样就留下麦田中央一块小正方形地上的麦子没有割。“现在，”他对他儿子说，“我已经割完了这块地上我的那一半，你可

---

① 阿尔昆（Alcuin，约 735—804），英国学者和教育家，著名僧侣。——译者注

以干你的那份活了。"儿子对这个活儿如此划分不是十分满意，这时村上的小学校长正好路过，他就请这位校长过来主持公道。校长发现，如果对这块麦田的尺寸没什么争议的话，农夫的做法是再正确不过的了，这样，他们便达成了一致。你能不能说出这块麦田的面积，就像这位足智多谋、做事卓有成效的校长那样？

112 一笔伤脑筋的遗产

一个人留下了一百英亩的土地，要分别以三分之一、四分之一和五分之一的比例分给他的三个儿子——艾尔弗雷德、本杰明和查尔斯。但是查尔斯死了。怎样把这土地公正地分给艾尔弗雷德和本杰明呢？

113 撕开的数



有一天，我拿到了一张标签，上面用大号字体写着 3025 这个数。这张标签不幸被撕成两半，30 在这一半纸片上，25 在另一半纸片上，如插图所示。我看着这些纸片，开始做起计算来，但我几乎没意识到我在做什么，这时我发现了这件小怪事。我把 30 和 25 加起来，然后将加得的和平方，结果我们得到了与标签上原来一模一样的数！具体地说，30 加上 25 等于 55，55 乘以 55 等于 3025。很奇特，是不是？现在，这道趣题就是：找出其他的由四个各不相同的数字组成的数，把它从中间分开后可导致同样的结果。

114 奇特的数

48这个数有其特别之处。如果你把它加上1,结果是一个平方数(49,7的平方);如果你把它的一半加上1,同样得到一个平方数(25,5的平方)。好了,具有这种奇特性质的数无穷无尽,这里是一道有趣的题目:再找三个这样的数——三个尽可能小的数。它们是哪些数呢?

115 排字工人的错误

一名排字工人在排一篇文章时,他应该排出 $5^4 \cdot 2^3$,这当然是指5的4次方(625)乘以2的立方(8),结果是5000。但是他却排成了5423,这就不对了。你能不能以所示的样子摆出四个数字,使得不管这位排字工人是排对了还是犯了同样错误,结果都是正确的?

116 转变态度的守财奴

贾斯珀·布利翁先生是那些少有的守财奴之一,他们已经被改造得对他们的不太幸运的同胞具有一种责任感。在一个世事多变的夜晚,他算出了他所积蓄的财产,并决定把这笔财产分发给值得帮助的穷人们。

他发现,如果他在一年中的每一天都捐出同样数目的英镑,那么他可以在十二个月中把这笔财产正好发完,一个子儿不留。但是如果他在星期日停一下,只是在每个工作日[①]捐出一定数目的英镑,那么到新年前夜将有一枚沙弗林剩下。现在,从最少的角度考虑,他要分发的英镑的准确数目是多少?

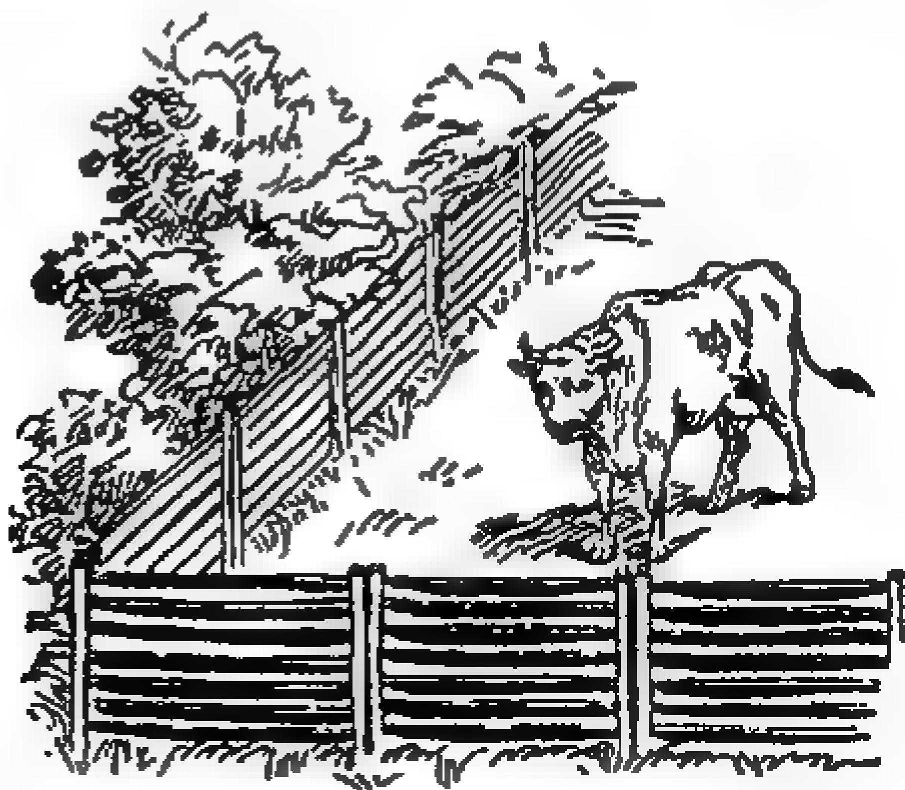
---

① 在本题中,除了星期日之外都算工作日。——译者注

有比这更容易的问题吗？一个英镑总数，除以一个天数，没有余数；但除以另一个天数，则余一枚沙弗林。就这些。然而，当你着手解决这个小问题时，你会对它变得如此搅脑子而感到惊奇。

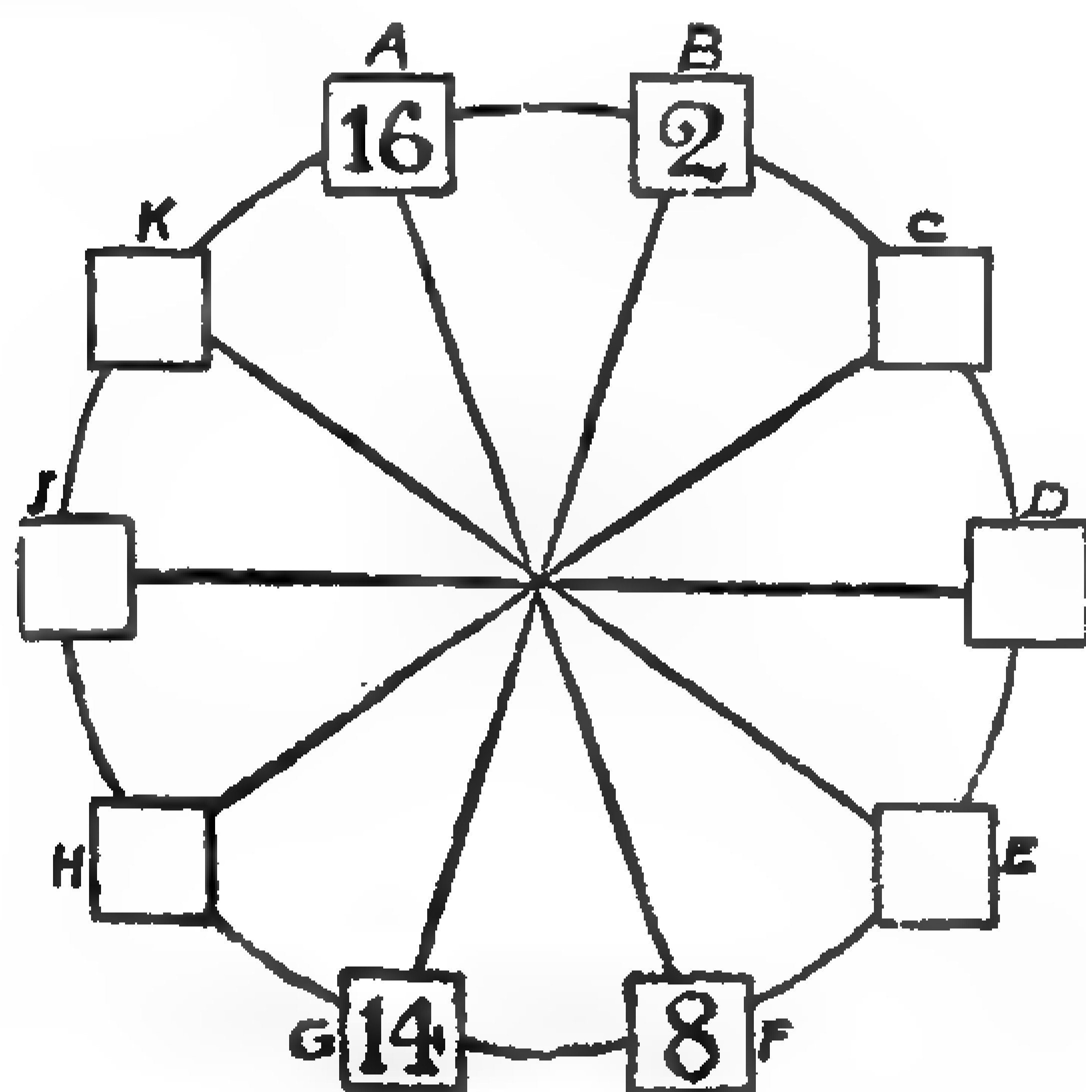
117 一个围栏问题

趣题的实际应用性是我们容易忽视的一个方面。不过，事实上我间或地收到了大量个人来函，来函者们发现，掌握一些作为趣题构建基础的小原理，对他们来说会以一种极其意外的方式显示出相当大的价值。确实，一道趣题，如果除娱乐性和难解性之外并没有隐藏着一些启发性的和潜在性的应用性质，那是没什么现实价值的。这可以作为一句好格言而被人们接受。然而，令人十分好奇的是，如此获得的零碎知识是怎样楔入日常生活中偶尔发生的需要的；同样令人好奇的是，我们有些读者把它们似乎用在了哪些奇怪而又神秘的地方。例如，威廉·奥克斯利先生从远隔千山万水的艾奥瓦州写信给我，希望弄清楚一个他打算围起来的牧场的大小，这个牧场所占有的英亩数要与围栏上的横档数一样多。他如此希望到底是为了什么呢？



这位先生希望用围栏围出一个标准正方形的牧场，这个牧场所占有的英亩数与所需围栏上的横档数相等。围栏的每个栏架，或者说它的每个部分，高为七根横档，而且每两个部分接起来的长度是一杆($16\frac{1}{2}$英尺)；也就是说，每杆(作为长度单位)有十四根横档。好了，这个牧场的大小一定是多少？

118 化方为圆[①]



这道趣题要求在这十个方框的每一个内分别放入一个不同的数，使得任何两个相邻数的平方和等于在直径另一端与它们相对的两个数的平方和。作为例示，已放入的四个数，当然有资格放在那儿。16 的平方是 256，而 2 的平方是 4，把它们加

① 原文为 circling the squares，这显然是模仿 square the circle，即"化圆为方"(古希腊三大尺规作图问题之一)，故译作"化方为圆"，但其意思是"把一些平方数(或方框，双关)摆成一个圆圈"。—— 译者注

起来,结果是260。同样,14的平方是196,而8的平方是64,加起来也是260。现在,B和C应该以完全同样的方式等于G和H(和不一定是260),A和K与F和E,H和I与C和D,总之,这个圆圈中任何两个相邻的方框都是这样。

你要做的只是填入余下的六个数。不允许用分数,而且我将表明,没有一个数需要包含多于两个的数码。

119 拉克布兰的小损失

拉克布兰教授正同他的老朋友波茨先生和波茨太太一起度过傍晚,他们在玩一种纸牌游戏(他没有说是什么游戏)。教授输了第一盘,结果把波茨先生和波茨太太放到桌子上的钱都翻了个倍。第二盘波茨太太输了,结果把她丈夫和教授当时所拥有的钱翻了个倍。真是离奇得很,第三盘的输家是波茨先生,而且结果也是把他太太和教授当时所拥有的钱翻了个倍。这时人们发现,他们每个人正好具有同样数目的金钱,只是教授在玩牌的过程中输了五先令。现在,这位教授问,他在桌子边坐下来准备玩牌时一共有多少钱?你能告诉他吗?

120 农夫与他的绵羊

农夫朗莫尔对算术有着一种奇特的爱好,因此在他生活的家乡被人们称为“数学农夫”。新来的牧师并不知道这件事。有一天他在那条乡间小路上遇到了这位不可小觑的堂区居民,并进行了一次简短的谈话。在谈话过程中,牧师问道:“现在,你一共有多少只绵羊?”于是他领受到朗莫尔的回答所产生的巨大震憾力了。这回答是这样的:“你可以把我的绵羊分成数量不同的两部分,使得这两部分绵羊数量之差与它们的平方



差是一回事。牧师先生,或许你很愿意亲自把这个不大的总数算出来。"

读者能不能说出这位农夫到底拥有多少只绵羊?假定他只有二十只绵羊,而且他把它们分为12只和8只这两部分。那么12与8的差是4,但它们的平方(144和64)之差是80。于是这不行,因为4和80当然不是一回事。如果你能找到算出来正确的数,你就会知道农夫朗莫尔到底拥有多少只绵羊了。

121 正面与反面

克鲁克斯是一名赌瘾很大的赌徒。最近,他在古德伍德对一个朋友说:"我用我口袋里所有钱的一半以掷硬币的方法同你赌——正面我赢,反面我输。"硬币不断地掷,钱不断地易手。他一而再地重复这个提议,每次都把他当时所拥有的金钱

的一半下赌。我们不知道这赌博进行了多久,也不知道这硬币掷了多少次,但这一点我们是知道的,即克鲁克斯输的次数正好同他赢的次数相等。好了,他在这次小冒险中是有所得还是有所失?

122 跷跷板趣题

确实,需求是发明之母。那天我饶有兴趣地观察着一名男孩,他想玩跷跷板,但又找不到其他的孩子来同他合玩这个游戏。于是他不得不采取了一种聪明的替代办法——把一些砖头绑在跷跷板的一端,以抵消他在另一端的体重。

事实上,如果把这些砖头固定在跷跷板的短端,那么他正好与十六块砖平衡;但如果他把它们固定在跷跷板的长端,那么他只需要十一块砖就可以达到平衡。

现在,如果一块砖的重量等于四分之三块砖的重量加上四分之三磅,那么这男孩的体重是多少?

123 一个法律上的困难

"我的一位客户,"一名律师说,"就要去世的时候,他的妻子正要给他生一个孩子。他立下遗嘱,其中他把遗产的三分之二给他的儿子(如果正好是生个儿子的话),三分之一给这位母亲。但如果生出的孩子是女孩,那么遗产的三分之二给母亲,三分之一给这个女儿。事实上,在他死后,一对双胞胎出生了——一个男孩,一个女孩。于是一个非常微妙的问题产生了。把这笔遗产在这三个人中间怎样公正地分配,才最符合死者遗嘱的精神?

124 一个关于释义的问题

“我的地产正好是一英里见方，”一个地主对另一个地主说。

“真是巧极了，我的地产是一平方英里，”另一个回答说。

“那么毫无差别！”

这最后一句话对吗？

125 矿工们的假日

七名煤矿工人在一次大罢工期间去海边度了一次假。这个小团体中的六人每人正好花了半个沙弗林，但是比尔·哈里斯更为奢侈些，他的花费比这个团体的平均水平多三先令。比尔的实际花费总额是多少？

126 简单的乘法

如果我们把六张卡片以1、2、4、5、7、8编号，并把它们按如下顺序排列在桌子上：

1 4 2 8 5 7

我们就可以演示：要把它乘以3，只要把1移到这排数字的另一头，这件事情就完成了。答案是428 571。你能不能找出一个数来，当把它乘以3再除以2时，其结果就相当于把第一张卡片（在这种情况下它将代表3）从这排数字的开头移到末尾呢？

127 简单的除法

有时候，初等算术中的一个非常简单的问题，都令人大伤脑筋。例如，我想用一个尽可能大的数去除这四个数——701、1059、1417和2312，使得其中每个数被除之后都留下同样

的余数。我应该从何处着手呢？当然，用一种蛮干式的尝试法，人们迟早能找到答案，但是有一种十分简单的方法可以做成这件事，只要你能找到这种方法。

128 一个关于平方数的问题

我们有三块正方形木板。第一块木板的面积比第二块大五平方英尺，第二块的面积比第三块大五平方英尺。你能不能准确地给出这些木板的边长？如果你能解决这道小趣题，那么试着去找出三个成一公差为 7 之等差数列的平方数；另外，差为 13 的也找三个。

129 黑斯廷斯战役

所有的历史学家都知道，关于在 1066 年 10 月 14 日这个决定命运的日子进行的那场永远难忘的战役[①]，其细节方面存在着大量的不解之谜。我这道趣题说的是一本由古代僧侣编写的编年史中的一段奇特的文字，这本编年史恐怕从来没得到应有的注意。即使我不能保证这份文献的可靠性，它还是可用来为我们提供一道题目，这道题目大概不会不引起我那些偏爱算术的读者们的兴趣。这里就是提到的那段文字。

“哈罗德的士兵就像他们惯常那样紧紧地站在一起，并且组成了六十一个方阵，每个方阵中的人数相同。哪个不知死活的诺曼人胆敢冲入他们的防御阵地，那就倒大霉了；因为只要一

---

① 即英国历史上著名的黑斯廷斯战役。一方是英格兰最后一个盎格鲁-撒克逊国王哈罗德二世（Harold Ⅱ，1022？—1066），另一方是法国的诺曼底公爵、后来的英国国王征服者威廉一世（William Ⅰ the Conqueror，1028？—1087）。经过一天的激战，哈罗德兵败身亡。——译者注

把撒克逊战斧一挥，他的长矛就被折断，他的铠甲就被砍穿……当哈罗德亲自加入战斗时，撒克逊人就排成了一个巨大的方阵，并呼喊着战斗口号，'滚蛋吧！''圣十字架！''全能的神！'"

现在，我发现当时所有的权威学者一致认为，撒克逊人确实是用这种连成一片的队形进行战斗的。例如有一首诗，叫《黑斯廷斯战役之歌》(*Carmen de Bello Hastingensi*)，据说是亚眠的主教居依(Guy)写的，他生活在这场战役发生的年代。诗中告诉我们，"撒克逊人紧密聚集，站立不动"。亨廷登的亨利[①]则记述道，"他们好像变成了一座城堡，诺曼人无法攻破"。一个世纪后，瓦斯[②]也对我们说了同样的情况。因此在这方面，我新发现的这本编年史不会有大错。但是我有理由认为，在实际数字方面，它有些地方搞错了。让读者去看看他根据这些数字能得出什么吧。

哈罗德手下的人数应该是一个平方数的六十一倍，但当哈罗德自己也加入战斗时，他们就能排成一个更大的方阵。应该有的人数至少是多少呢？

为了让读者明白这个问题的简单性，我给出方阵数为 60 和 62(61 的一前一后)时的最少人数。它们是 $60\times4^2+1=31^2$ 和 $62\times8^2+1=63^2$。也就是说，60 个方阵，每个方阵 16 人，一共是 960 人，而当哈罗德加入到他们当中时，他们就是 961 人，因此可排成一个每边有 31 人的方阵。对于我就 62 个方阵而给出的数字，情况类似。好，去找出对于 61 个方阵来说的最少人数吧。

---

① 亨廷登的亨利(Henry of Huntingdon，1084？—1155)，英格兰编年史家和历史学家。他的《英格兰史》(*Historia Anglorum*)是中世纪英格兰史的重要资料。——译者注

② 罗伯特·瓦斯(Robert Wace，1100？—1180？)，盎格鲁-诺曼语诗人，著有诗体编年史。——译者注

130 雕塑家的问题



一位古代的雕塑家受委托制作了两座雕像，每座雕像都配有一个立方体的垫座。我们关心的就是这两个垫座。如插图所示，它们大小不等。到了付酬的那一天，关于付酬协议是基于长度量度单位还是基于体积量度单位，双方发生了争执。但是当他们着手测量了这两个垫座后，事情马上就解决了。因为真是稀奇得很，其长度的英尺数正好是其体积的立方英尺数。这道趣题就是要求找出具有这种奇特性质的两个垫座的尺寸，数字要尽可能小。你看，如果这两个垫座的边长，比方说量出来分别是 3 英尺和 1 英尺，那么它们在长度上就是 4 英尺，而体积是 28 立方英尺，它们在数值上不相等，所以这些尺寸不行。

131 西班牙守财奴

从前，在新卡斯蒂利亚[①]的一个小镇上，住着一个著名的守财奴，名叫唐曼努埃尔·罗德里格斯。他对金钱的喜爱，

① 西班牙中部高原的旧省区名。——译者注

只有他对算术题目的一种如火热情可与之相比。这些趣题总是以这种或那种方式与他所积攒的财富相关联，而且都是由他独自提出来的，这样他就可以享受到亲自解决它们的乐趣。不幸的是，它们几乎都没能留下来，而且当我遍游西班牙，为一项拟议中的关于“西班牙洋葱乃国家衰落之原因”的工作收集材料时，我也只找到了极少数的几道。其中有一道是关于这幅惟妙惟肖的画像中那三只箱子的。



每只箱子里都放有一些金达布隆[1]，各箱枚数不等。上面箱子里的达布隆枚数与中间箱子里的达布隆枚数之差，正好是中间箱子里的达布隆枚数与底下箱子里的达布隆枚数之差。而且任两只箱子里的达布隆合并在一起，其枚数都能成为一个平方数。可以是其中某一箱子中达布隆枚数的最小数是什么？

---

① 旧时西班牙及其美洲殖民地的金币名。——译者注

132 九只财宝盒

下面这道趣题将说明，能够确定一个所求数的上限和下限，有时候是十分重要的。这样的事会经常发生。例如，国际象棋中的马可以有多少种不同的方式走遍棋盘上各格再回到出发点，这一点还没弄清楚；但是我们知道，这个数目小于从168件东西中每次取出63件东西的组合数，大于31 054 144——因为后者是走一种特殊类型路径的方式数。或者举一个更为熟悉的情况，如果你问一个人他口袋里有多少枚硬币，他会告诉你他一点数目也没有。但是进一步问下去，你会从他那儿得到像下面这样的说法："好吧，我肯定我有三枚以上的硬币，但同样肯定的是不会多到二十五枚。"现在，在我这道趣题中，某个数介于2和12之间这个信息，将使得解题者能够找到准确的答案；如果没有这个信息，会有无穷多个答案，要从中选出一个合适的答案是不可能的。

这是从我的朋友唐曼努埃尔·罗德里格斯，即新卡斯蒂利亚那个古怪的守财奴那儿弄来的又一道趣题。1879年新年除夕，他向我展示了九只财宝盒，并告诉我每只盒子里的金达布隆枚数都是平方数，而且盒子A和B的金币枚数之差，等于B和C，D和E，E和F，G和H，H和I的金币枚数之差。随后，他就要我告诉他每只盒子中的金币枚数。起初我认为这是不可能的，因为会有无穷多个不同的答案，但是经考虑，我发觉情况并非如此。我发现，虽然每只盒子里都有金币，但A、B、C中金币的重量按字母顺序增加；D、E、F亦如此；G、H、I亦如此；但是D、E不一定比C重，G、H也不一定比F重。还有一件完全肯定的事就是，盒子A充其量也放不下一打以上的硬币；可能半打都不到，但我肯定不会超过十二枚。根据这个信息，我就能得到正确答案。

简而言之，我们得找出九个平方数，其中A、B、C成一等差数列，D、E、F成一等差数列，G、H、I成一等差数列，这三个等差数列的公差相同，而且A小于12。这九只盒子中的达布隆各为多少枚？

133 五个强盗

有五个西班牙强盗，阿方索、贝尼托、卡洛斯、迭戈和埃斯特万，在一次抢劫后清点赃物，发现他们一共抢到了正好200枚达布隆。这帮强盗中有一人指出，如果阿方索抢到他现在所抢的十二倍，贝尼托抢到他现在所抢的三倍，卡洛斯所抢不变，迭戈只抢到他所抢的一半，埃斯特万只抢到三分之一，那么他们仍然一共抢到正好200枚达布隆。他们每人抢到了多少枚达布隆？

这个问题有好多个同样正确的答案。这里是其中的一个：

阿方索	6	×	12	=	72
贝尼托	12	×	3	=	36
卡洛斯	17	×	1	=	17
迭戈	120	×	$\frac{1}{2}$	=	60
埃斯特万	45	×	$\frac{1}{3}$	=	15
	200				200

这道趣题是要你求出一共有多少个不同的答案。不言而喻的条件是，他们每人都抢到了一些钱，而且不会是分数数目的钱——在任何情况下，都只有达布隆。

这道题目是由塔尔塔利亚[①]提出来的，只是叙述有所不同，而且他自以为找到了一个解答；但是一位有名的法国数学家拉博斯纳(M. A. Labosne)在最近出版的一部著作中说，当他向他的读者们保证，这个问题有 6639 个不同的正确答案时，他们一定会十分惊喜。情况真是这样吗？到底有多少个答案呢？

134 银行职员的趣题

一位银行职员有一个生性喜欢冒险的客户，此人对什么事都急于打赌。银行职员希望客户能改掉这个坏习惯，于是提议同他打个赌，说他不能把一只盒子中的东西分成数量相同的几堆[②]。这只盒子里只有六便士硬币，是由银行职员和这名客户按以下规则放进去的：首先由银行职员放入一枚或更多枚的六便士硬币(他喜欢放多少就放多少)，然后由客户放入一枚或更多枚的六便士硬币(不过对他来说，要求放人的硬币总价值不能超过一英镑)，他们双方都不知道对方放了多少；最后，客户得按银行职员的要求从后者的柜台上拿一些六便士硬币放入盒中。这道趣题就是要你求出银行职员一开始应该放入多少枚六便士硬币，而且他应该要求这客户从他柜台上拿多少枚硬币放入盒中，才能使他具有最大的赌赢机会。

①尼科洛·塔尔塔利亚(Nicolò Tartaglia, 1499—1557)，意大利数学家。真名尼科洛·丰塔纳(Nicolò Fontana)，“塔尔塔利亚”是“口吃者”的意思。因小时遭战乱，下巴受到重伤，落下口吃，故有此称，并代替了真名。最著名的贡献是发现了两类三次方程的解法，从而为解决一般的三次方程奠定了基础。此外，在机械、军事、测量方面也有不少贡献。——译者注

② 严格地说，堆数要大于 1，每堆中东西的数量也要大于 1。——译者注

135 石匠的问题

有一位石匠，一度拥有大量的立方体石块，都放在他的场院上，尺寸全都一样。这位石匠有一些稀奇古怪的小癖好，他的古怪念头之一就是把这些石块垛成一个个的立方体堆，而且任意两堆的石块数目都不相同。他独自发现了一个事实（这个事实对数学家来说是熟知的）：如果他从只有一块立方体石块的那堆开始，按常规顺序取任意多个石堆，那么他总可以把这些石堆中的所有石块在地上铺成一个标准的正方形。对读者来说，这将是很显然的，因为一块石块的 1 是个平方数，1 + 8 = 9 是个平方数，1 + 8 + 27 = 36 是个平方数，1 + 8 + 27 + 64 = 100 是个平方数，等等。事实上，只要从 1 开始，任意多个相继立方数的和总是一个平方数。

有一天，一位绅士走进了这石匠的场院，并答应给他一个好价钱，如果他能从这些立方体石堆中选出一些尺寸相继的石堆提供给他，而且其中所包含的全部石块可铺开来形成一个正方形的话。不过，这位买家坚决要求有三堆以上的石块，而且他拒绝接受只有一块石块的那堆，因为那石块上有道裂痕。这位石匠最少要提供多少块石块？

136 苏丹的军队

某位苏丹希望派一支可用十二种不同方式排成两个标准方阵的军队投入战斗。组成这支军队的人员至少有多少？为了让新手明白，我解释一下：如果有 130 人，那么他们只能以两种不同的方式排成两个方阵——81 和 49，或 121 和 9。当然，每次都得用上所有的人。

137 对节俭的一次研究

某些数被称作三角形数，因为如果筹码或硬币的枚数取这些数，那么这些筹码或硬币就可在桌子上铺开来形成一个三角形。1 这个数总是被看作三角形数，就同 1 是平方数和立方数一样。把一枚筹码放在桌子上——这意思是，这是第一个三角形数。现在又放两枚筹码在它下方，你就有了一个由三枚筹码构成的三角形；因此 3 是三角形数。接下来再放上一排三枚筹码，于是你有了一个由六枚筹码构成的三角形；因此 6 是三角形数。可以看到，我们加上去的每排筹码，都比它上方那排筹码正好多一枚，从而构成了一个更大的三角形。

好，任何一个正整数与它本身之平方的和的一半就是一个三角形数。例如，$2+2^2\div2=3$，$3+3^2\div2=6$，$4+4^2\div2=10$，$5+5^2\div2=15$，等等。因此，如果我们想构造一个每条边上有 8 枚筹码的三角形，我们将需要 $8+8^2\div2=36$ 枚筹码。这是这类数的一个小小特点。在进一步讲下去之前，我在这儿要说，如果读者看过“石匠的问题”（第 135 题），那他将会记起从 1 开始的任意多个相继立方数之和总是一个平方数，而这些平方数形成了序列 $1^2,3^2,6^2,10^2$，等等。现在你能理解我的这个说法了：解开那道趣题的钥匙之一是这些数总是三角形数的平方——也就是说，是 1、3、6、10、15、21、28（我们已经看到这些数中的每一个都可以构成一个三角形）等等的平方。

每一个整数，要么是三角形数，要么是两个三角形数之和，要么是三个三角形数之和。也就是说，任取一个整数，我们总可以用它形成一个、两个或三个三角形。1 这个数显然而且唯一地只能形成一个三角形；有些数只能形成两个三角形（如 2、4、11 等）；有些数只能形成三个三角形（如 5、8、14 等）。接下来还有，有些数既能形成一个也能形成两个三角形（如 6），也有一些

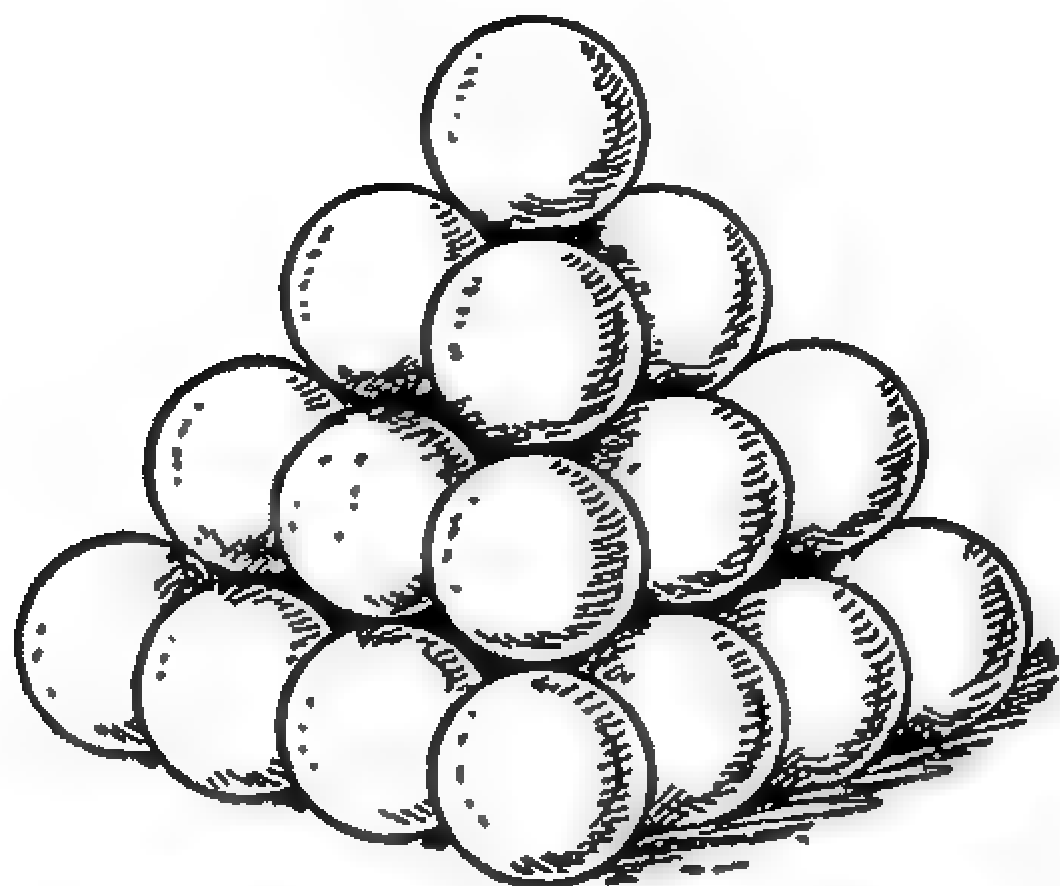
数既能形成一个也能形成三个三角形(如3和10),还有一些数既能形成两个也能形成三个三角形(如7和9),而正如我们所期望的,有些数(如21)一个、两个、三个三角形都能形成。现在说一道关于三角形数的小趣题。

阿伯丁的桑迪·麦卡利斯特实行严格的家庭经济管理,并急切地想把他的好老婆训练得同他一样具有节俭的习惯。上一次除夕日,他对他老婆说,当她积攒的沙弗林多到把它们全部铺在桌子上能形成一个标准的正方形,或一个标准的三角形,或两个三角形,或三个三角形(按照他随意提出的要求)时,他就会在她积攒的钱财中加上五英镑。没过多久,她就带着一小袋共36英镑的沙弗林来到她丈夫跟前认领奖赏。你会发现,这三十六枚钱币可形成一个正方形(边长为6),可形成单单一个三角形(边长为8),可形成两个三角形(边长分别为5和6),也可形成三个三角形(边长分别为3、5和5)。正如所要求的,在这四种情况中,这三十六枚钱币都用上了。于是桑迪像一个讲究信用的男人那样把他所承诺的奖赏给了他老婆。

接着这个苏格兰人答应把他的承诺再延长五年,这样,如果第二年他老婆手中积攒的沙弗林增加到能被铺成同样这四种不同的形式,那么她将获得第二份奖赏;如果她在接下来的一年再能成功,她将获得第三份奖赏,如此下去,直到她前后一共获得六份奖赏。好,如果她要赢得第六份奖赏,那么她必须积攒到多少枚沙弗林呢?

你要做的事是求出五个数,它们是能用四种方式——形成一个正方形,形成一个三角形,形成两个三角形,形成三个三角形——表现的大于36的尽可能小的数。这五个数中最大的那个就是你的答案。

138 炮兵的困境



“所有的炮弹都要堆成一个个正四棱锥。”这是发送到团部的命令。执行完毕。又来了一道命令：“所有这些棱锥形炮弹堆中的炮弹数目都要是平方数。”于是麻烦来了。“这不可能做到，”少校说，“例如，瞧这堆炮弹。它最底下一层有十六颗炮弹，往上是九颗，再往上是四颗，最后是顶上的一颗，一共三十颗炮弹。必须再有六颗，或者拿去五颗，才能形成一个平方数。”“命令必须执行，”将军坚决地说，“你要做的事就是把数目恰当的炮弹放进你那些四棱锥。”“我有主意了！”一名中尉说，他是这个团的数学天才，“把这些炮弹一个个都摊在地上。”“胡扯！”将军大叫，“不许用一颗炮弹堆成一个四棱锥！”是不是真的能同时执行所有这些命令？

139 荷兰人的妻子

我很想知道我的读者当中有多少人知道“荷兰人的妻子”这道趣题。在这道趣题中，你得确定三位先生的妻子的名字，说得确切一点，你得确定谁是谁的妻子。大约三十年前，它

“风行一时”，就像什么新潮的东西那样。但是最近我在1739年至1740年的《女士日记》(*Ladies' Diary*)里发现了它，因此它在一百七十多年前对女性来说显然是很熟悉的。今天，我们的母亲、妻子、姐妹、女儿和姑姑婶婶阿姨舅妈中有多少人能解决这道趣题呢？比例要比那时大很多吧，让我们希望。



有三位荷兰人，名叫亨德里克、埃拉斯和科尔内留斯，和他们的妻子，古尔特琳、卡特琳和安娜，买了一些猪。每个人所买猪的头数，与他(或她)买猪单价的先令数相等。每位丈夫总共所付的钱都比他妻子多三个几尼。亨德里克比卡特琳多买了二十三头猪，而埃拉斯比古尔特琳多买了十一头。好，各位先生的妻子叫什么名字？

140 求出埃达的姓

这道与上面那道十分相似，我关于解决那道趣题的议论，读者可能很愿意将之用于另一种情况。这道趣题最近投给

悉尼的一家迷恋于“智力雕琢者”的晚报,但被拒绝了。审稿意见说它是个小儿科的东西,而且他们只刊登可以解答的问题!五位女士,由她们的女儿陪着,在同一家商店购买布料。她们十人每人为每英尺布料所付的法寻数与她所买布料的英尺数相同,而且每个母亲比她女儿多花了 8 先令 $5\frac{1}{4}$ 便士。鲁滨逊夫人比埃文斯夫人多花了 6 先令,而后者所花大约是琼斯夫人的四分之一。史密斯夫人是所有人中花得最多的。布朗夫人比贝茜(那五位姑娘之一)多买了 21 码布料。安妮比玛丽多买了 16 码,比埃米莉多花了 3 镑 8 便士。还有一位姑娘的名是埃达。好,这位姑娘的姓是什么?

141 星期六的购物

这儿是一个关于购物的有趣小案例。它虽然说到了许多钱项,但却通向一种性质完全不同的问题。最近的一个星期六晚上,四对小夫妻去他们社区买点儿东西。他们不得不十分节俭,因为他们总共只有四十枚一先令的硬币。后来的情况是,安妮花了 1 先令,玛丽花了 2 先令,简花了 3 先令,而凯特花了 4 先令。男人们比他们的妻子要奢侈,因为内德·史密斯的花费同他妻子一样,汤姆·布朗的花费是他妻子的两倍,比尔·琼斯则是他妻子的三倍,而杰克·鲁滨逊是他妻子的四倍。在回家的路上,有人提出应该把余下的硬币在他们中间平分掉。于是他们就这样平分了。这个令人费解的问题就是:各位女士的姓是什么?你能把这四对小夫妻配出来吗?

几何问题

上帝不停地进行几何化。

——柏拉图

“没有一门学问，”德摩根[①]说，“能像几何学那样，一开始表现得那么的简单；也没有一门学问，当我们学下去时，其难度的增长速度能比几何学还要快。”这一点，当读者着手考虑下面这些趣题时就会发现，虽然它们并不是严格按照难度顺序编排的。而它们世世代代以来令人们感兴趣、给人们以愉悦这一事实，无疑在一定程度上是由于它们在吸引大脑的同时也吸引着眼球。有时候，一个代数式子或一个代数定理似乎给数学家的眼球以快感，但这可能只是一种智力上的快感。然而在某些几何问题上，特别是在剖分趣题或叠置趣题上，有时无

① 奥古斯塔斯·德摩根（Augustus de Morgan，1806—1871），英国数学家和逻辑学家。数学（集合论和布尔代数）中的德摩根定律就是他确立的。——译者注

疑是人类的审美天赋促成了这种快乐。例如,如果不是在某种程度上被一种美感所打动,大概没有什么读者会去考察后面几页中关于希腊十字架的各种各样的切割方式。大自然的定律和秩序总是在乖乖地沉思默想,但当它们来到特别的慧眼之下时,似乎会产生一种特别强的吸引力。甚至什么几何知识也没有的人,在审视了这些东西之后也会情不自禁地呼喊:"太漂亮了!"事实上,据我所知,被裁剪趣题的魅力引上几何学研究道路的不止一人。因此,我认为把这些剖分趣题与类型上比较常规的几何题目区别开来是恰当的。

剖分趣题

你把他带去，剖分成无数的星星。

——威廉·莎士比亚：《罗密欧与朱丽叶》第3幕第2场

趣题有着无穷多的类型，但恐怕没有一类趣题比剖分、裁剪或叠置趣题更古老了。公元前几千年的时候，它们肯定就为中国人所知。而且它们今天仍然像在它们历史上任何时期的那样迷人。那些对此进行过研究的人猜想，中国古代的哲学家们把这些趣题用作一种启蒙方法来传授几何学原理。不管情况是不是这样，可以肯定的是，所有优秀的剖分趣题（至于拼图游戏这类幼稚的趣题，只不过是把一个图形分割成一些碎块，然后再拼起来，不值得认真考虑）确实都是以几何学定律为基础的。但这一说法并不一定会把新手吓走，因为它还有稍进一步的意思，即，虽然解答往往可能是由聪明的人在运用了耐心、技巧和常智之后发现的，但几何学将给我们"为什么会是这个解答的理由"，如果我们有兴趣知道这一点的话。

如果我们要把一个平面图形切割成几块后经调整再拼成另一个图形，第一件事就是全力找出做到这一点的一种方法，然后是去发现如何用尽可能少的切割块来实现这一点。一道剖分趣题，如果没有这个对块数的限制，常常是十分容易的。当1902年《每周快讯》上刊出如何把一个等边三角形切割成四块再拼成一个正方形的一种方法（见《坎特伯雷趣题集》第26题）的时候，任何一位几何学家都不会在用五块做到所要求的事上遇到困难：上面这项发现的全部特点就在于只用四块就完成了这个小小的业绩。

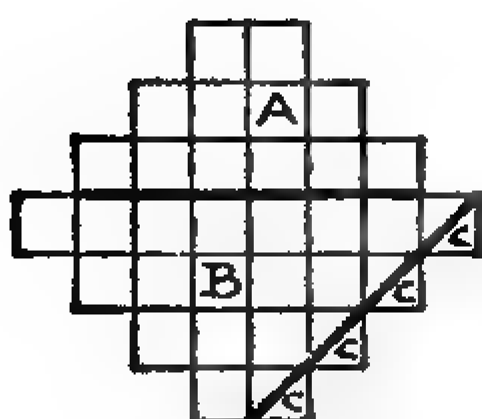


图1

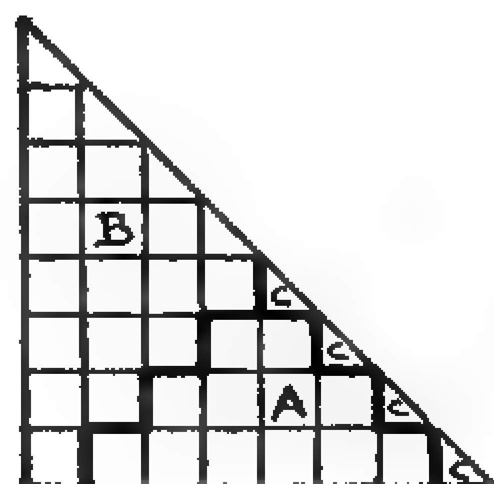


图2

对这些题目来说，纯粹的近似方法是没有价值的；解答必须在几何学意义下是准确的，否则它根本就不是解答。谬误时而会产生，我将有必要提到其中的一两个。它们之所以令人感兴趣，仅仅是因为它们是谬误。但是我要就两个小问题说一些话。这两个小问题，即"命悬一线"和"咸鱼翻身"问题，在裁剪趣题中老是发生，它们可用一道趣题来予以充分说明。这道趣题经常在一些老书中看到，但所附的解答千篇一律地错了。这道趣题是要求把图1所示的图形分割成三块，然后拼在一起形成一个"半正方形"。人们给出的答案千篇一律地如图1和图2所示。好，据宣称，那四块标着C的图形实际上只算一块，因为它们可以如此割下，使得它们处于"用一根线悬吊在一起"的状态。但是任何一位严肃的趣题爱好者都不会对此表示同意。如果这种切割可以做得让这四块连成一块，那它不可能成为一个绝对准确的解答。另一方面，如果要让这解答绝对准确，那么就应该算四块——或者说总共六块。因此，这不是一个仅用三块的解答。

然而，如果读者看一下图3和图4所示的解答，他会明白，其中绝对找不出这样的错误。这里是三块，什么问题也没有。就这一点而言，这个解答令人十分满意。但是发生了另一个问题。经细察，你会发现图3中标着F的那块图形在图4中翻了

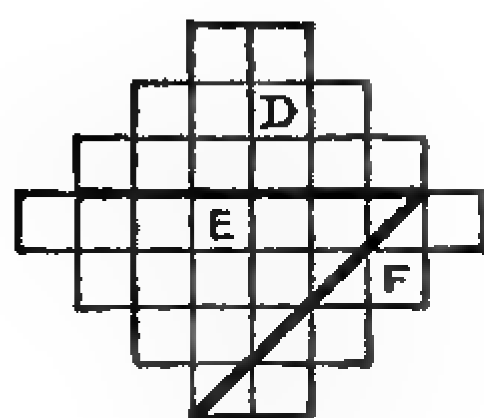


图 3

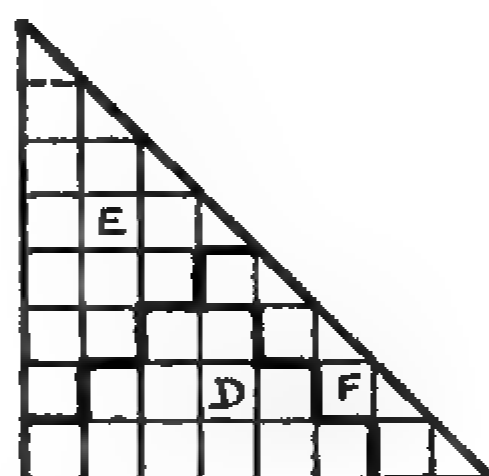


图 4

个身——也就是说，必须把另一面展现出来。如果这道趣题只是在纸板或木板上做切割，那么对这种翻转可能不会有什么异议，但很可能这材料不允许被翻转。可能有一种图案，一种光泽，一种纹理上的差别，阻止你这样做。不过人们公认，在剖分趣题中，把切割块翻个身是允许的，除非它明确声明不可以这样做。而且，通过加上条件"任何一块图形都不可翻转"，一道趣题往往会得到很大改进。我也经常制作趣题，其中图形上有一种重复出现的小图案，于是切割块不但不允许翻身，而且拼起来后图案也要匹配；而要使图案匹配，切割块就不能转换方向，即使它还是原来那面朝上。

在献上各种类型的裁剪趣题（有的十分容易，有的则很难）之前，我建议先单独考察一类趣题——那些涉及所谓希腊十字架与正方形的题目。这将展示一大类各种各样奇特的变换，而且，随着我们的不断向前，读者将得知有关解答，从而省去老是去翻阅本书另一部分的麻烦，什么事情都将在他眼皮底下。希望通过这种方式，本文可以对新手起到某种启发性的作用，而对其他人起到引发兴趣的作用。

希腊十字架趣题

用各种背十字架式的苦难来侵扰你的灵魂。

——斯宾塞[①]

至于讲到我自己,那就像希腊语,我一点儿都不懂。

——威廉·莎士比亚:《裘力斯·恺撒》第1幕第2场

许多人通常把十字架看作是一种专门的基督教标志。这是错误的:它的历史十分古老。古埃及人把它作为一种神圣的标志,而在古希腊的雕塑上,我们发现了一种带有十字的小面包(据认为是我们现在的十字面包[②]的真正起源)的图画。在赫库兰尼姆[③]发现了两个这样的小面包。刻克洛普斯[④]将一个这样的圣面包(boun)献给了奥林匹斯山上的主神朱庇特。球和十字架的组合体,经常可在埃及绘画中发现,它们表现为圆和T形十字架。圆表示这世界的永久保护者;而T取自希腊字母τ,是Thoth(透特)的首字母签名草体。透特是埃及神话中诸神的

---

① 埃德蒙·斯宾塞(Edmund Spenser,1552—1599),英国诗人。诗体完美,富于音乐性,后被称为斯宾塞体,对英国诗歌格律的形成影响很大。——译者注

② 基督教受难节的特色食品,一种加有香料和干果的小圆面包,上面用糖霜画了个细小的十字。——译者注

③ 古罗马城镇,在现意大利拿不勒斯附近。公元前79年与庞贝古城一起被维苏威火山喷发所毁灭。——译者注

④ 希腊神话中半龙半人的怪物,雅典的创建者,阿提卡(古希腊中东部一地区)的第一位国王。——译者注

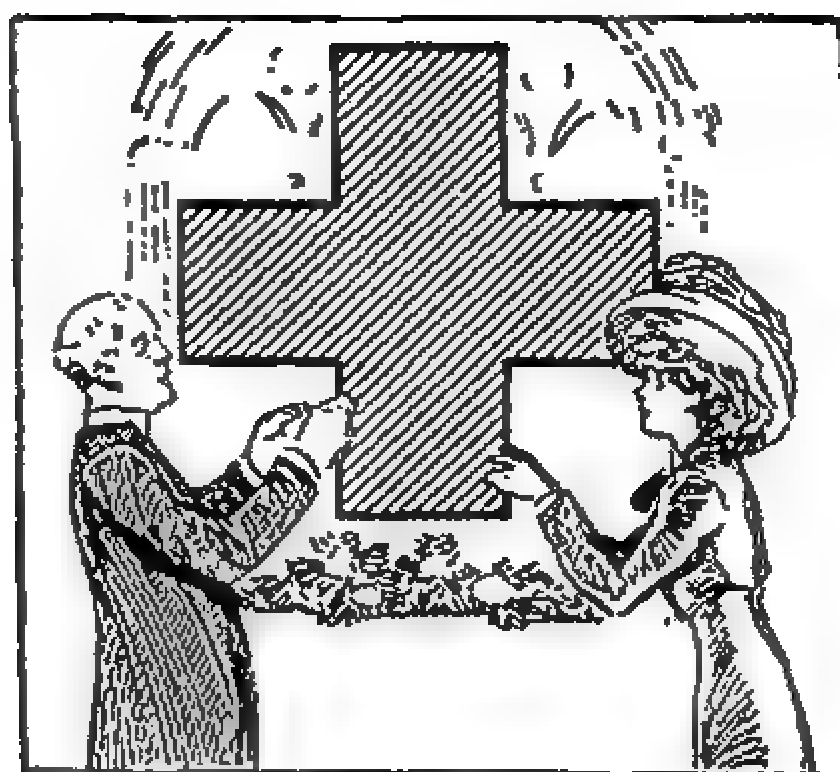


图 5

信使，主智慧。这个 T 形十字架也被基督徒称为圣安东尼十字架，并被刻在埃克塞特主教宫的一枚徽章上。至于希腊十字架或称世俗十字架，即那种具有四条同样的臂的十字架，资深的古董专家告诉我们，在几千年的时间中，它一直被古代的神秘学者看作代表自然界中一对力的标志——这对力就是每一件永存事物的阳性和阴性。

如图 5 所示，希腊十字架是用五个相同的正方形拼起来形成的。我们将从所谓的印度教问题开始，这个问题据说有三千多年的历史了。它出现在哈佛学院的印鉴上，也经常出现在古老的著作中，以象征数学的科学性和精确性。把这个十字架切割成五块，再拼成一个正方形。图 6 和图 7 显示了怎样做到这

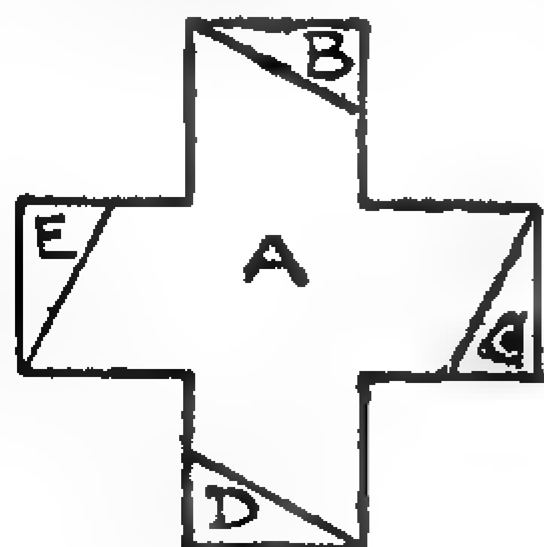


图 6

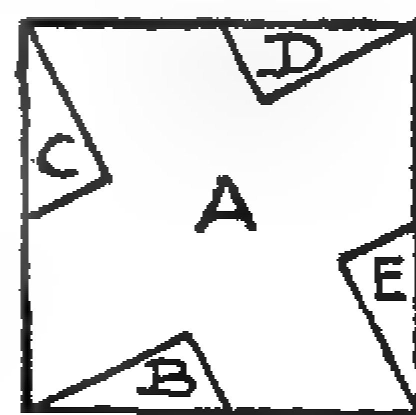


图 7

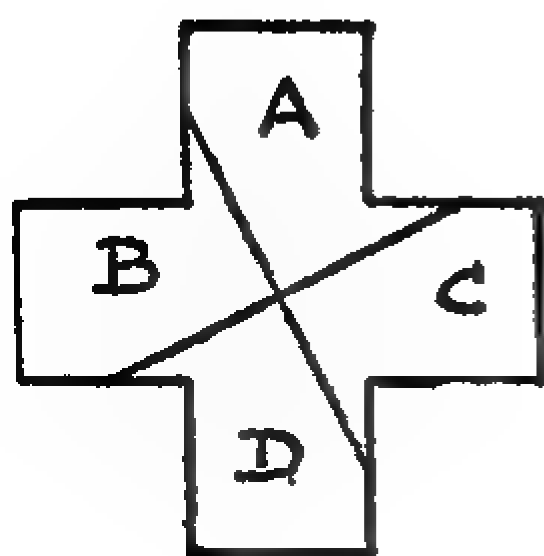


图 8

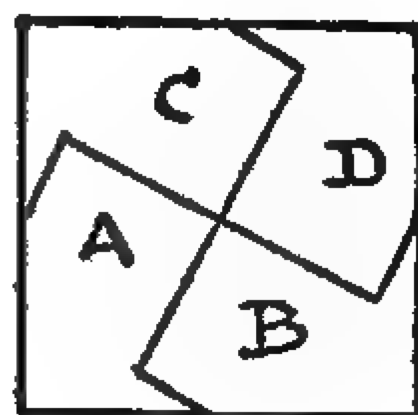


图 9

一点。直到 19 世纪中叶，我们才发现，只要切割成四块就可以把这个十字架变换成一个正方形。如果我们进一步要求那四块的大小和形状都一样，那么图 8 和图 9 就显示了怎样做到这一点。这幅图 9 值得注意，因为据勒普隆热翁（Le Plongeon）博士及其他人的说法，例如史密森学院的威尔逊教授在一本著作中的阐述，这里我们有非凡的万字饰，或者说代表“给你好运气”的标志卍——这是人类有文字记载以来最古老的符号。威尔逊教授的著作中给出了这个奇特标志的大约四百幅插图，这个标志被发现存在于墨西哥的阿兹特克土墩中，存在于埃及的金字塔中，存在于特洛伊的废墟中，存在于印度和中国的古老传说中。人们差点会说，希腊十字架与万字饰之间有着一种奇特的因缘！不过，如果我们要求只用剪刀剪两下就剪出四块（假定这道趣题是以纸的形式提出的），那么我们必须像图 10 那样

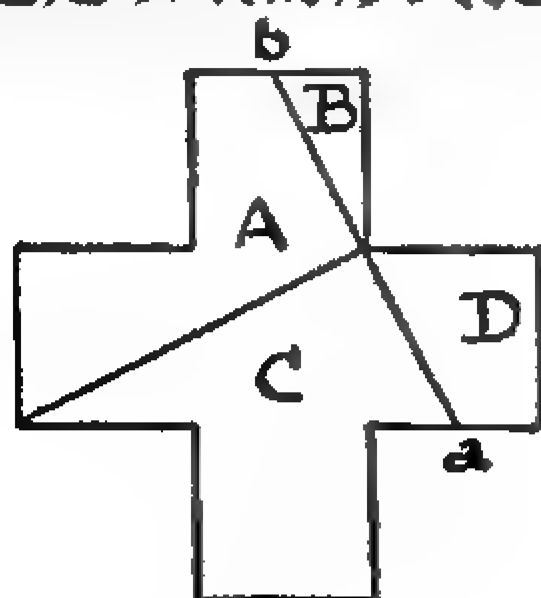


图 10

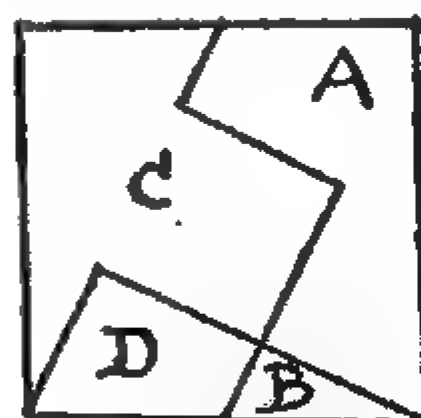


图 11

剪，以形成图 11 的样子，其中第一剪是从 a 到 b。当然，在这种情况中，将纸折叠起来，或者在第一剪之后将切割块放在一起，都是不允许的。然而，用四块来解决这道趣题的切割方法，有着无穷多种。这一点我打算到后面再说。

可以看到，这些趣题的每一个都有其反问题——把一个正方形切割成几块再拼成一个希腊十字架。但由于正方形不像十字架那样有比较多的角，因此找出正确的切割走向并不总是那么容易的。然而对于上述这些例子的反问题，我让读者自己去确定切割走向，因为根据那些图示，这是很容易看出的。

把一个正方形切割成五块再拼成两个相互分离而且大小不同的希腊十字架。这是一道十分容易的趣题。就如在图 12 中看到的那样，我们只要把那个正方形划分成 25 个小正方形，然后如图切割。十字架 A 是完整地切割下来的，而切割块 B、C、D 和 E 则拼成了图 13 中的大十字架。读者或许在这里愿意把一个切割块，比方说 B，切割成四个形状与原来的 B 完全相似的切割块，然后用它们按图 13 所示的方式拼成一个十字架。我大概不需要给出解答了吧。

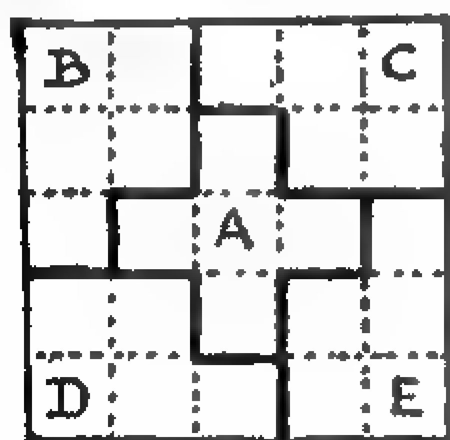


图 12

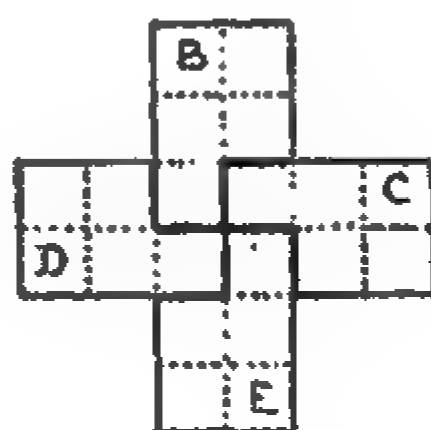


图 13

把一个正方形切割成五块再拼成两个相互分离而且大小完全相同的希腊十字架。这就比较难了。我们如图 14 那样进行切割，于是十字架 A 完整地割出来，而其他四块则拼成了图 15 中的十字架。这些切割的走向是很容易看出的。可以看到，图

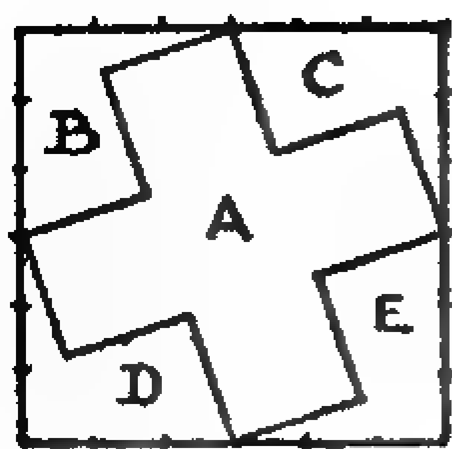


图 14

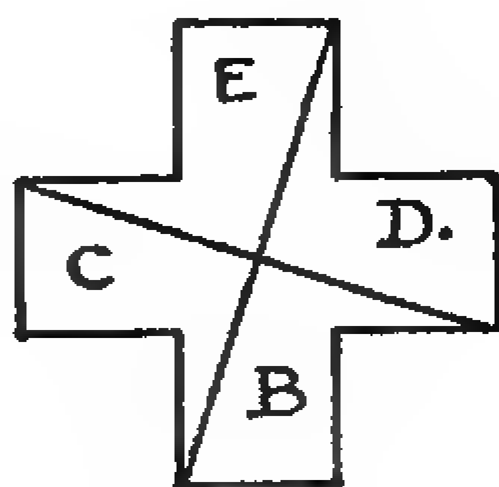
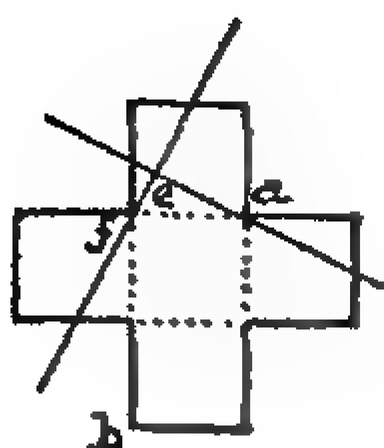


图 15

14 中正方形的各条边被标示点等分为六段。在这些标示点中从某一点到另一点作直线，便可得出十字架的各条边。

现在我实现我的承诺，解释一下为什么把一个希腊十字架切割成四块再拼成一个正方形会有无穷多种不同的方法。画一个十字架，如图 16。然后在一张透明纸上画出如图 17 所示的正方形，注意从 c 到 d 的距离与十字架中从 a 到 b 的距离严格相等。现在把透明纸覆在十字架上到处滑动，滑到不同的位置上，只是要十分注意让正方形相对于十字架的角度总是保持不变，即保持 ab 平行于 cd，如图所示。如果你把点 c 准确地放在点 a 上，那些直线就标出了图 10 和图 11 所示的解答[①]。如果你把 c 放在那虚线正方形的正中心，那就给出了图 8 和图 9 中的解答。现在你看到，把这个正方形到处滑动，同时让 c 总是位于虚线正方形的内部，通过这种方式，你想有多少个解答就会得到多少个解答。这是因为：既然从理论上说，这个虚线正方形的内部有无穷多个点好放，那么一定有无穷多个不同的解答。不过点 c 不一定要放在这虚线正方形的内部，例如，它可以放在点 e，从而给出一个只用四块的解答。这里 a 处和 f 处的结合部你要

① 对照图 10，你会发现这里给出的解答与图 10 有所不同。但是把图 10 沿逆时针方向转过 90°，再做一次翻转，就相同了。通常把这种情况称作"本质上相同"。以下同。——译者注



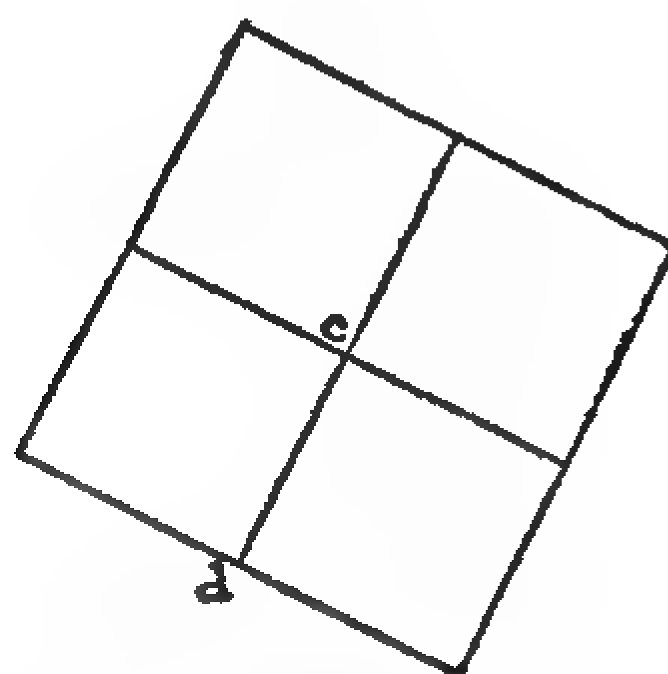


图 16　　　　图 17

多细就可以多细。不过你一旦越过了 a 处或 f 处的边界，你就再也不会有只用四块的解答了。你会发现这个证明既有娱乐性又有启发性。如果你手头正好没有透明纸，当然可以用随便什么样的薄纸，你只要把两张纸对着窗户上的一格玻璃就可以了。

有人可能已在我上述趣题的解答中注意到，用十字架切割拼成的那个正方形的边长总是等于图 16 中 a 到 b 的距离。这是必定如此的。我稍后将试着把这一点说得尽量清楚。

现在我们再前进一步。我曾经说过，一道裁剪趣题的理想解答总是那种所需切割块为最少的解答。我们刚才看到，可以把一个正方形切割成五块而拼成两个同样大小的十字架。成功地解决了这道趣题的读者或许会自问："它能用更少的切割块解决吗?"这正是真正的趣题爱好者经常在问的那种问题，而且这也是他应该采取的正确态度。对这个问题的回答是：这道趣题可以用四块解决——这是最小的块数了。那么，这就是一道新趣题：把一个正方形切割成四块再拼成两个同样大小的希腊十字架。

解答非常美丽。如果你把这正方形的各条边用点子等分为三段，图 18 中每条线的走向就很容易看出了。如果你沿着这些线切割，切割块 A 和 B 将拼成图 19 中的那个十字架，而切割块

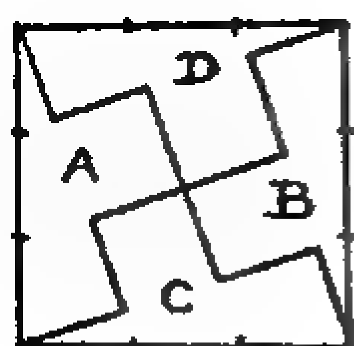


图 18

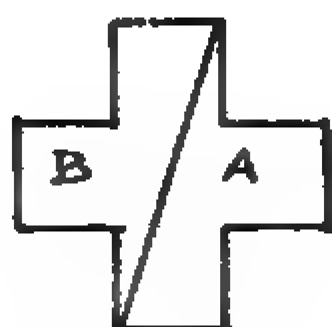


图 19

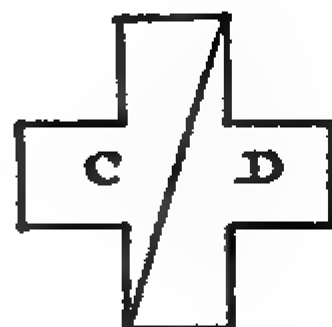


图 20

C 和 D 将拼成图 20 中那个同样大小的十字架。在这个正方形中,我们遇到了另一种形式的万字饰。

在这里,读者将体会到我下面这个评述的正确性,其大意是:把一个十字架转换为一个正方形时对切割走向的寻找,比把一个正方形逆转为一个十字架时要容易。例如,图 6、图 8 和图 10 中的切割走向比图 14 中的更容易看出。在图 14 中,我们首先得把正方形的各条边等分为六段,而在图 18 中,我们将之等分为三段。于是,假定要你切割两个相同的希腊十字架,每个十字架切成两块,然后拼成一个正方形。对图 19 和图 20 看一眼就会明白,比起切割这个正方形以拼成两个十字架的反问题来,这个问题容易得滑稽可笑。

说到我对"谬误"的评述,我将给出这些不是解答的"解答"中的一个小例子。几年前,一位年轻的来函者给我寄来了他显然认为是一项伟大新发现的东西——把一个正方形切割成四块而转换成一个希腊十字架,而且所有的切割线都平行于这正方形的边。我把他的努力结果表示在图 21 和图 22 中。从中我们看到,切割下来的四块没有形成一个标准的希腊十字架,因为那四条臂并不是正方形,而是长方形。要使它成为一个真正的希腊十字架,我们应该补上我用虚线表示的部分。当然,他的解答给出了一个十字架,但这不是趣题条件所要求的那种标准的希腊品种。我这位年轻的朋友认为他的努力结果"几乎丝毫不差地"正确;但如果他用一枚六便士硬币买了一便士的苹果,得到

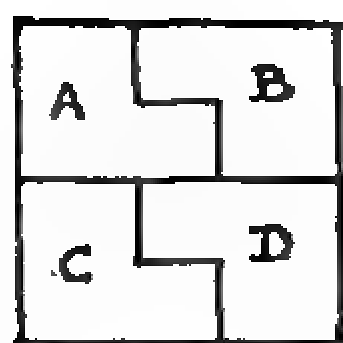


图 21

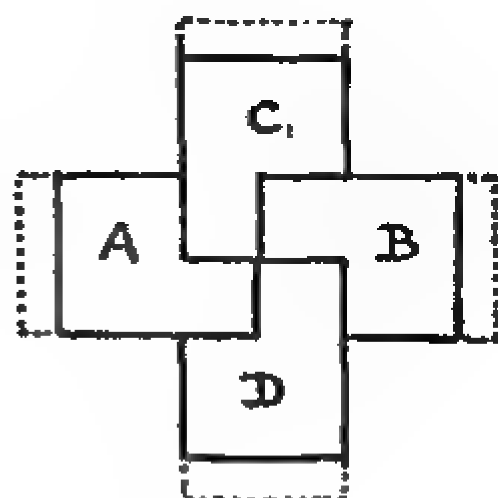
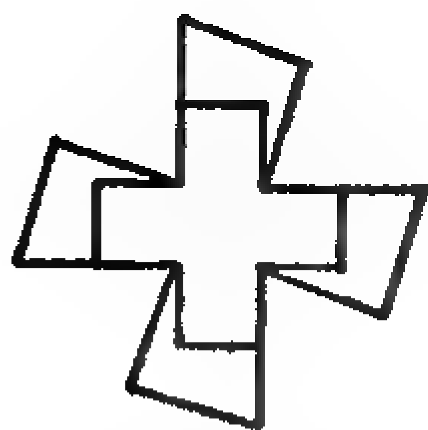


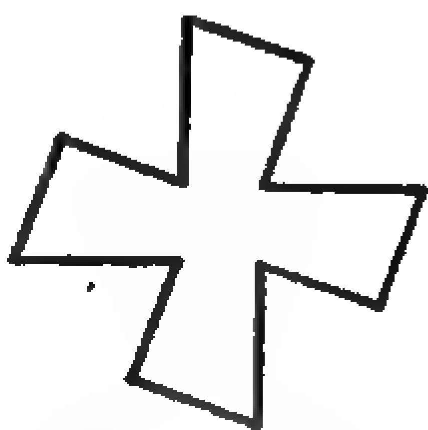
图 22

的找零只有四便士，他大概不会认为这也“几乎丝毫不差地”正确吧。这位读者继续看下去，就会理解这个精确性问题的重要性了。

在这些裁剪趣题中，不仅需要尽可能正确地得到切割线的走向，而且需要记住，这些线是没有宽度的。如果用这些文章内容中所表明的一种方式把这些十字架中的一个切割开来之后，你发现切割块并不能准确地拼拢起来以形成一个正方形，那么你可以肯定这完全是你自己的错。不是你的十字架画得不准确，就是你的切割没有准确地沿正确走向进行，要不就是你的锯子不够精细（如果你用的是木材和线锯的话）。如果你是用剪刀在纸上裁剪，或用袖珍折刀在纸板上切割，来解决这道趣题的，那么不会有材料损失；但如果用锯子，不管它有多精细，总有一定的损失。对于大多数趣题，如果是在大面积的材料上进行切割的话，这点微小的损失不足以造成影响。但有着这样的例子，我发现其中要做出完美的结果，最好把每个部分单独地画出并切割下来——而不是都从一个图形上切割下来。

现在我们来看另一道趣题。如果把图 14 中所指明的五块切割下来，你会发现这些切割块可以放在一起以形成如图 23 所示的那个奇特的十字架。因此，如果我要你把图 24 切割成五块，以拼成一个正方形，或者拼成两个相同的希腊十字架，你就


图 23


图 24

会知道怎样做到这一点了。你可以进行如图 23 所示的切割，然后把切割块如图 14 和图 15 那样放在一起。但是我想要更好一些的东西，它就是这个：只把图 24 切割成四块，然后把切割块拼在一起形成一个正方形。

这道趣题的解答如图 25 和图 26 所示。在第一幅图中，划分 A 和 C 的切割的走向非常显然，而第二个切割与它成直角。这样的四块能够拼得拢并形成一个正方形，这会使新手感到惊奇。他最好还是花些心思研究一下这道趣题，因为它十分具有启发性。

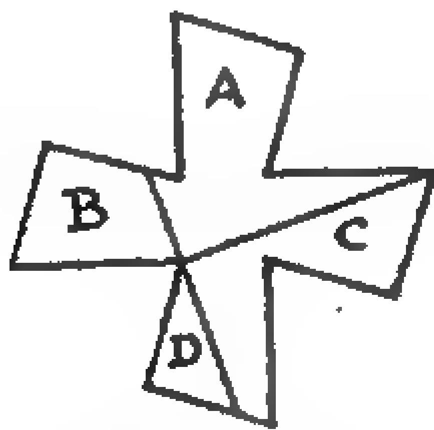


图 25

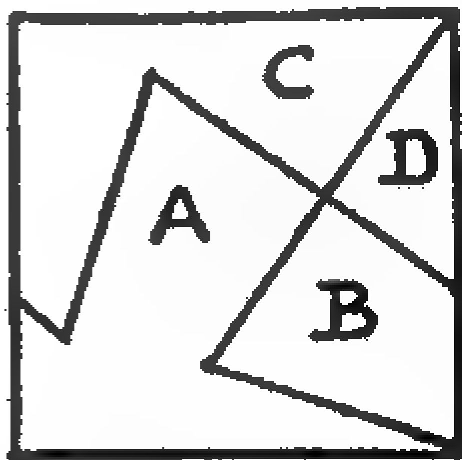


图 26

我现在将说明一条美丽的规律，我们用它来确定与一个希腊十字架有相同面积的正方形的尺寸，因为它对解决我们遇到的几乎每一道剖分趣题来说都是合用的和必要的。它首先是由死于公元前 500 年的哲学家毕达哥拉斯发现的，并且是欧几里得《几何原本》中的第 47 号命题。对几何学基本原理一无所知的年轻读者，将会初步了解这门科学的迷人之处。图 27 中的三

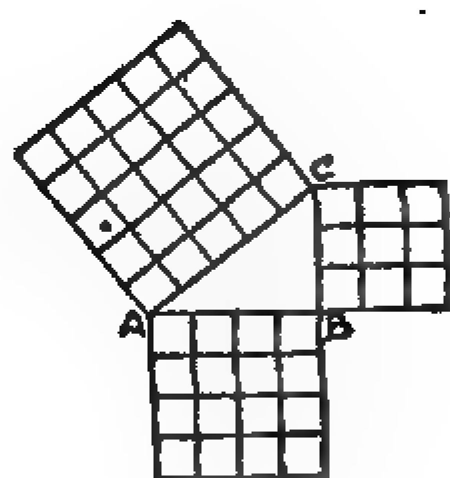


图 27

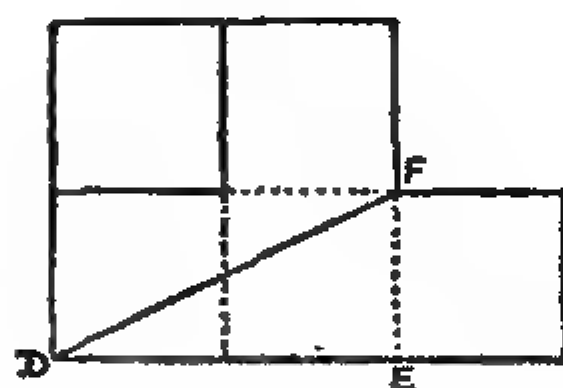


图 28

角形 ABC 是我们所谓的直角三角形,这是因为 BC 边与 AB 边成直角。现在,如果我们在这三角形的每条边上各建起一个正方形,那么 AB 上的正方形和 BC 上的正方形加起来正好等于长边(我们称之为斜边)上的正方形。这一点,在我给出的这个案例中,通过把这三个正方形划分成一些同样大小的小方格而得到证明。可以看到,9 加上 16 等于 25,即大正方形中的方格数。如果你用边长 5、12 和 13,或者 8、15 和 17 来构造三角形,就会得到类似的算术证明,因为这些都是"有理"直角三角形。不过,这条定律对所有情况都是成立的。假定我们把一个希腊十字架的下臂切割下来,放到上臂的左边,如图 28 所示,那么 EF 上的正方形加到 DE 上的正方形上,正好等于 DF 上的正方形。于是我们知道,以 DF 为边的正方形,其面积与这个十字架相同。这一事实我们实际上已通过这一系列趣题中前面几道的解答而予以证明。但是不管给 DE 和 EF 什么整数长度,我们永远都不能用整数给出 DF 的准确长度;因为这个三角形不是"有理"三角形。不过这条定律在几何上仍然是成立的。

现在看图 29,你会看到一种把一形状为两个正方形(其相对大小任意)的木片切割成三块再拼拢起来形成一个单一正方形的简洁方法。如果你标示出距离 *ab*,使它等于边长 *cd*,那么切割方向就非常明显了。根据我们刚才的考虑,你立刻就会知

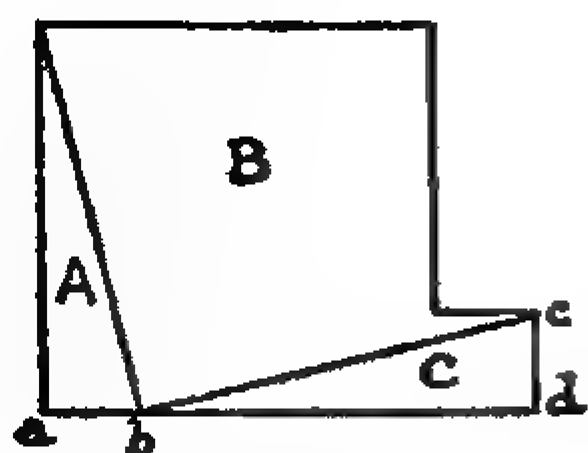


图 29

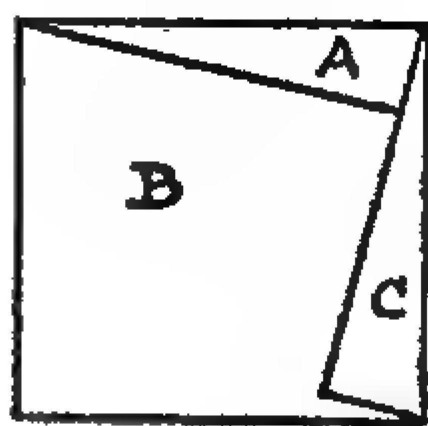


图 30

道为什么 *bc* 必然等于新正方形的边长。只要你愿意,尽量多做这个实验,给这两个正方形取各种不同的相对比例,你会发现这条规律总是成立。如果你令这两个正方形大小完全一样,就会看到随便哪个正方形的对角线总是一个大小两倍于此的正方形的边。所有这些,简单得每个人都能理解,对于解决裁剪趣题却十分重要。事实上这是其中大多数趣题的解题关键。这条规律是如此美丽,以至于让人似乎感到一种遗憾,因为它竟然不为每个人所熟悉。

我们现在再前进一步,研究一下"半正方形"。取一个正方形,沿对角线对半切开。现在请设法找出把这个三角形切割成四块再拼成一个希腊十字架的方法。解答如图 31 和图 32 所示。可以看到,在这个案例中,我们把这三角形的两条边等分为三段,而把其长边等分为四段。于是切割走向就很容易地看出来了。这道趣题很妙,而且比我所给的部分其他趣题的要难。

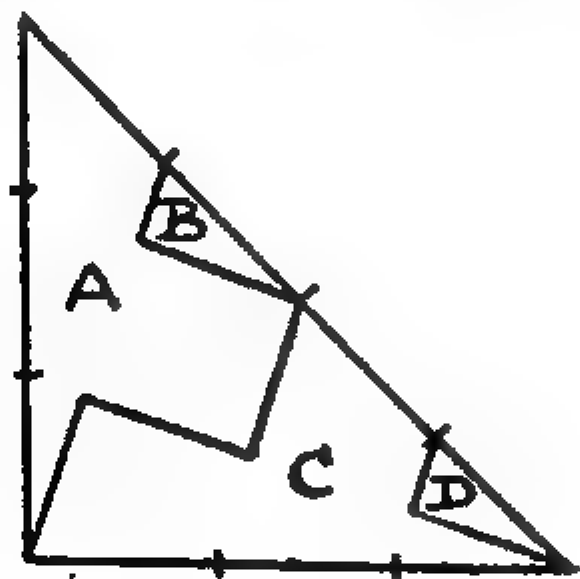


图 31

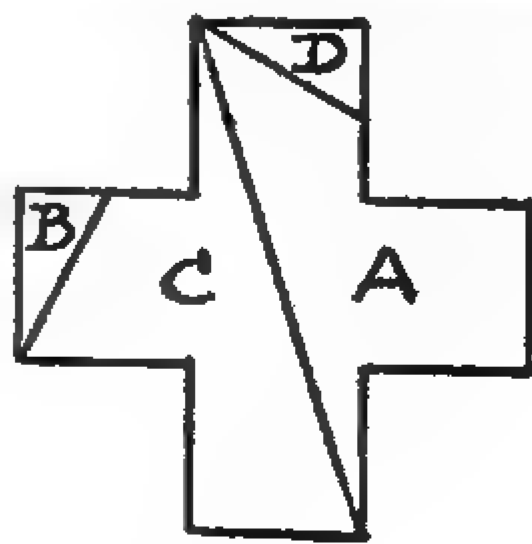


图 32

应当再次强调一下，在其反问题——切割一个十字架以拼成一个作为半正方形的三角形——中，切割路线的定位要容易得多。

趣题制作者常怀心中的另一个理想是，尽可能做到只有一个正确解答。例如，对于第一道趣题，如果我们只要求把一个希腊十字架切割成四块再拼成一个正方形，那么正如我已证明的，就会有无穷多个不同的解答。如果加上一个条件，切割下来的四块必须大小和形状一样，那就制出了一道更好的趣题，因为这样它只能有图 8 和图 9 那样的一个解答了。同样，用这种方法，一道简单得毫无趣味的趣题，可以通过加上一个诸如此类的条件而得到改进。让我们举一个例子。我们从图 28 已经看到，可以把图 33 切割成两块再拼成一个希腊十字架。我想一个聪颖的孩子会在五分钟内做到这一点。但是假定我们说这道趣题必须用一块木片解决，而这块木片上有一个坏节疤，这是一个我们不可以去切割的节疤，其位置如图 33 所示。于是切成两块的解答就被排除了，而这道趣题就变成一道要求用三块来解决的更为有趣的题目了。我已经在图 33 和图 34 中展示了一种解决方法，你会发现，去找出其他的解决方法是很有乐趣的。当然，我可以引进更多的节疤来排除所有这些其他的方法，从而把这道趣题限制为只有单一解答，不过这样会导致条件过多。

这就把我们带到了寻求理想趣题之路的另一个点上。你的

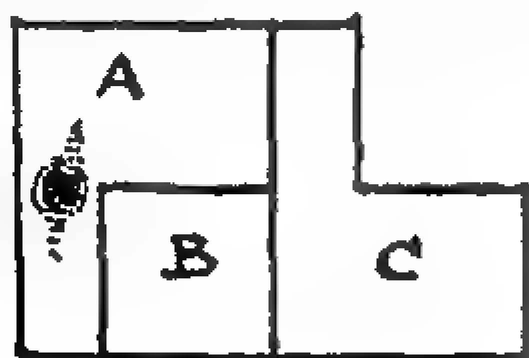


图 33

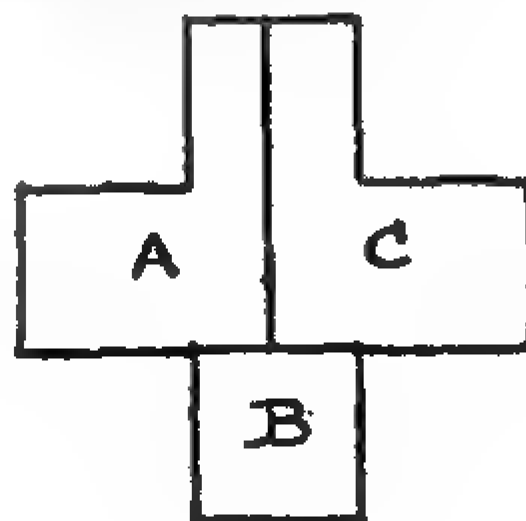


图 34

条件不能太多,否则会使你的趣题太复杂而毫无趣味。一道趣题,条件越简单越好。解答可以随便怎样复杂困难,只要你愿意,或者碰巧如此,但条件必须简单明了,否则人们不会去求解。

如果读者现在被要求“把半个正方形切割成尽可能少的块,然后拼成一个希腊十字架”,那么他很可能给出我们在图 31 和图 32 中的解答,并自信地宣称他已正确地解决了这道趣题。这样他可就错了,因为这次并没有说那半个正方形是把正方形沿对角线剖分而得来的。虽然我们每次都应该准确地考察趣题的条件,但不允许看出并不存在的条件来。许多趣题就是基于这种人们必定会这样做的倾向。

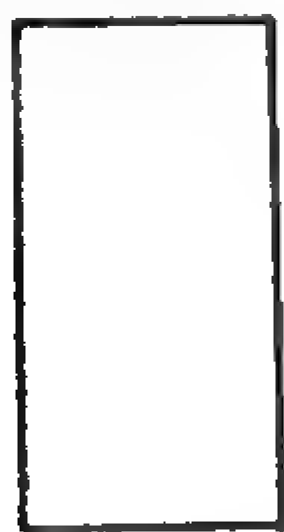


图 35

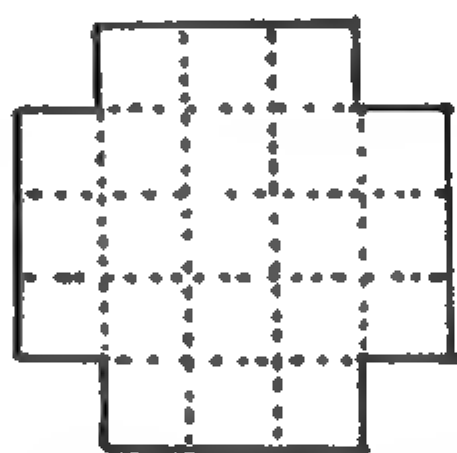


图 36

解决一道趣题的首要关键在于,你必须准确地理解条件。好,如果你把你的正方形对半分开,结果产生图 35,那么在对它进行切割以拼成一个希腊十字架时,切割的块数可以小到三块。这样我们就省了一块。

我在图 36 中又给出了一道趣题。其中加上虚线只是为了准确地表明这图形的组成——先用 25 个小方格组成一个正方形,然后把四个角上的小方格切去。这道趣题要求把这图形切割成五块,以形成一个(整块的)希腊十字架和一个正方形。

上面这两道趣题中的第一道——把一个形状为半个正方形矩形切割成三块再拼成一个希腊十字架——的解答如图 37 和

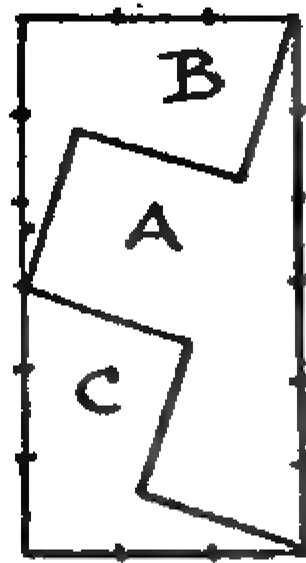


图 37

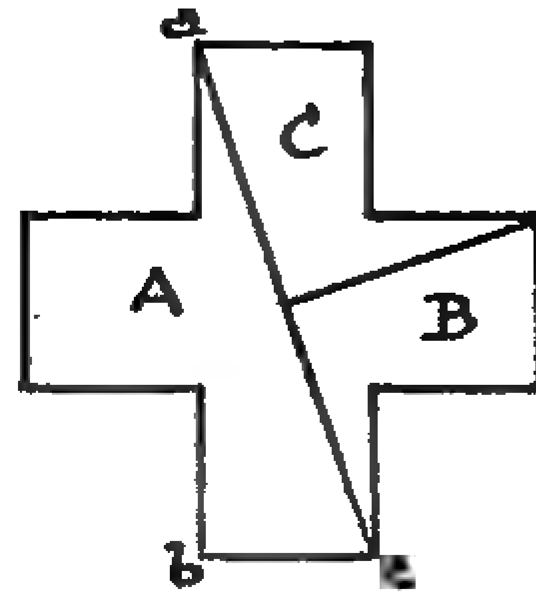


图 38

图 38 所示。可以看到，为了得到标示切割走向的几个点，我们把这长方形的长边等分为六段，把其短边等分为三段。读者应将这个解答与前面的一些插图进行比较。他会看到，比方说，如果我们把十字架中 B 与 C 之间的分隔线延长下去，就得到了图 15。

另一道趣题，就像图 12 和图 13 所示的那道，将表明有时候那么一点儿算术在解决剖分趣题中原来是多么的有用。我们的图形被分成了二十一个小方格，我们要用这些小方格组成一个正方形和一个希腊十字架。好，由于那个十字架是由五个小方格构成的，而 21 减去 5 得 16——一个平方数——我们应该很容易由此而走向图 39 所示的解答。可以看到，十字架是被完整地切割下来的，而其余的四块则拼成了图 40 中的正方形。

当然，一个作为半个正方形的矩形，同时也是个双正方形，

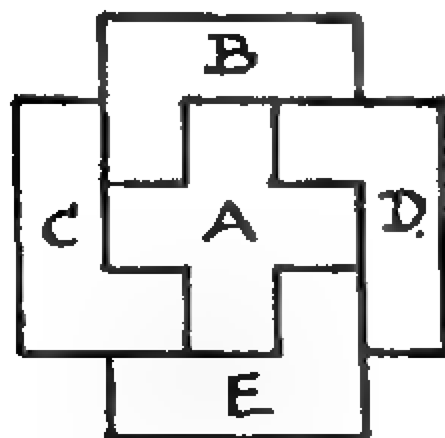


图 39

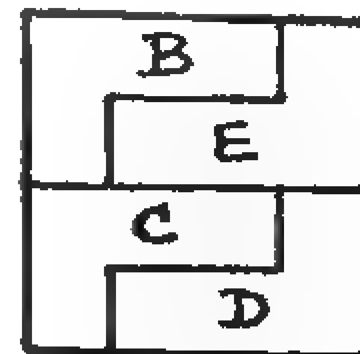


图 40

即合在一起的两个同样的正方形。因此,如果你要解决这样一道趣题——把一个希腊十字架切割成四块再拼成两个相互分离而且大小相同的正方形——的话,你要做的只是把图 38 中那条短切割线延长,使它横贯十字架,于是你会得到形状和大小都相同的四块图形。现在用一条水平切割线把图 37 拦腰分成两个相同的正方形,你就会看到那四块图形拼成了两个正方形。

把一个希腊十字架切割成五块再拼成两个相互分离的正方形,其中一个面积为那十字架一条臂的面积的一半。为进一步用图来说明我曾经说过的一件事,把图 41 中那两个同样大小的正方形 ABCD 和 BCEF 按虚线所示切开,切下来的四块就拼成了大正方形 AGEC。于是我们看到,对角线 AC 就是一个大小两倍于 ABCD 的正方形的边。同样显然的是,任何正方形的对角线的一半等于面积为一半的正方形的边长。因此,如果图中的大正方形就是你那十字架的一条臂,那么小正方形在大小上就等于这道趣题所要求的正方形之一。

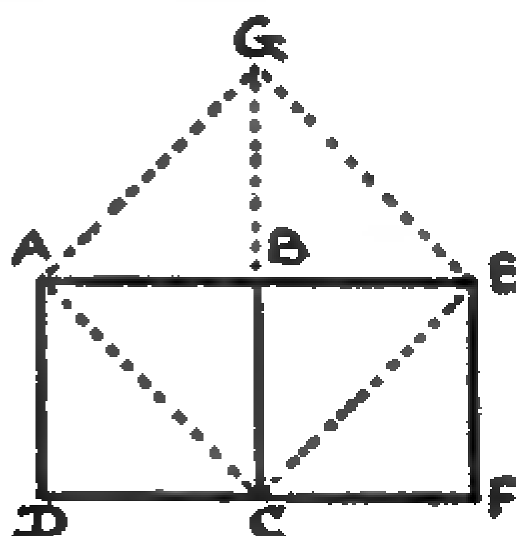


图 41

解答如图 42 和图 43 所示。可以看到,那个小正方形是完整地切割下来的,而大正方形则由 B、C、D 和 E 组成。看过了我所写的这些内容之后,读者将不难明白正方形 A 在大小上是十字架的一条臂的一半,这是因为前者对角线的长度显然是后者的边长。至此这件事不证自明。这样,我就努力地表明了,在那

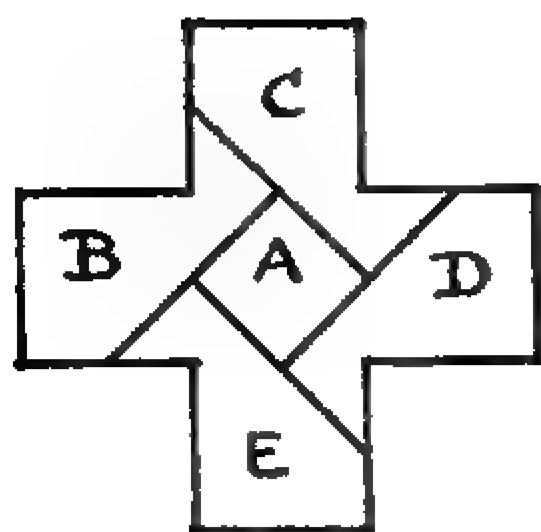


图 42

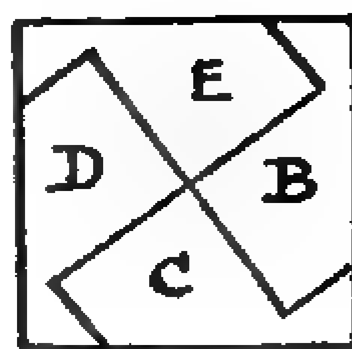
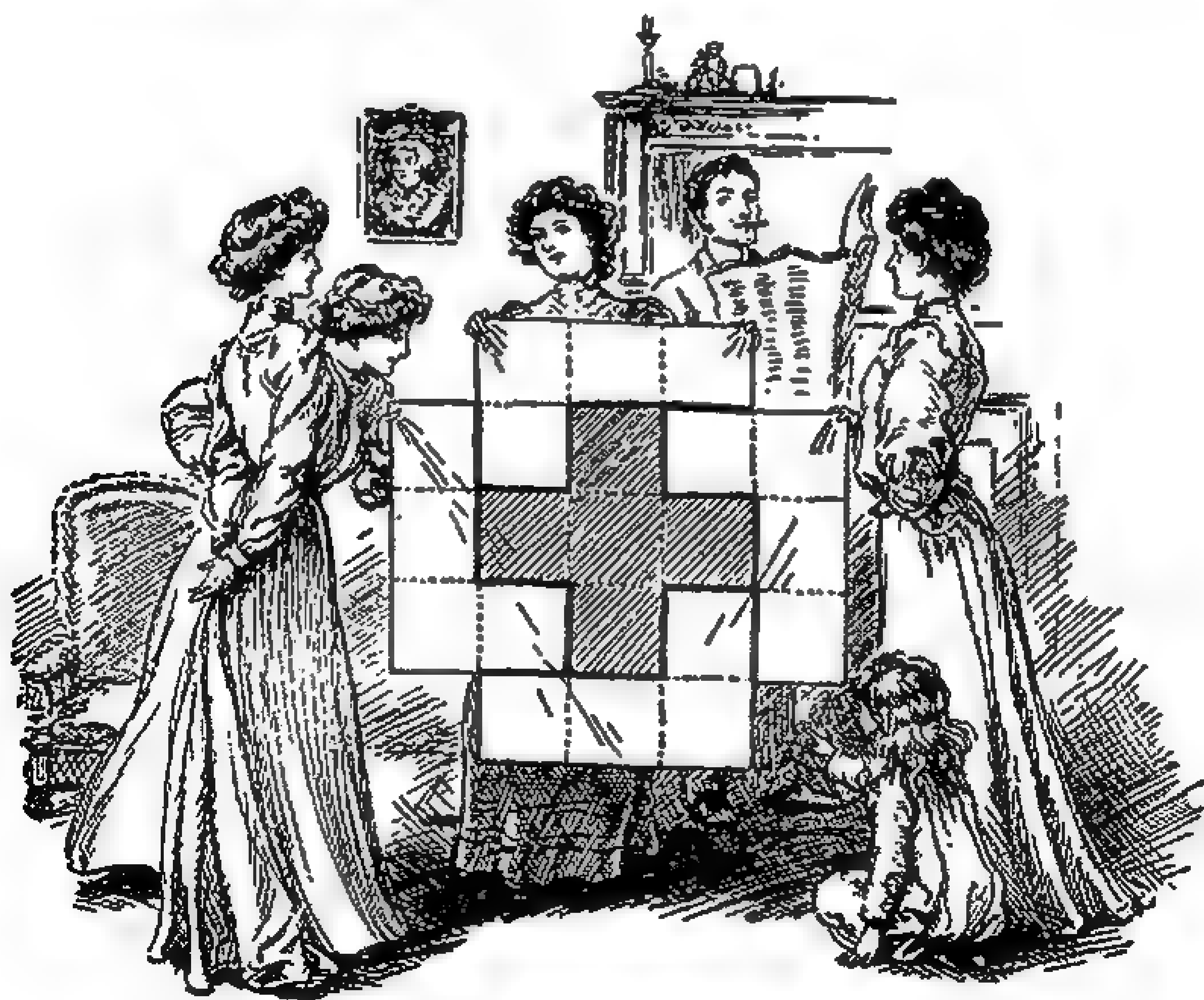


图 43

些被许多人习惯地认为是绝妙无比、令人不知所措的趣题中，有一些真的是不难，只要我们用点儿思考力和判断力。

作为这个特定主题的结束，我将给出四道希腊十字架趣题，它们的答案相互间没有联系。

142 丝绸百衲被



威尔金森家族的女性成员们缝制了一床简单的百衲被，作为一件圣诞节小礼物。这床百衲被由同样大小的正方形块组成，如图所示。只要在四个角上各补上一块，这床被子就完成了。有人向她们指出，如果你们把中间那个希腊十字架拆下来，然后沿着那粗黑的接缝把针脚割断，那么这四块大小和形状都相同的东西就能拼拢起来形成一个正方形。读者已从图 39 中的解答知道，这件事很容易做到。但是乔治·威尔金森突然向她们提出了这样一道难题。他说："我不要你们把那十字架完整地拆下来并把那四块相同的东西拼成一个正方形，我问你们能不能割下一个完整的正方形和四块相同的东西，而后者能拼成一个标准的希腊十字架！"当然，现在这道趣题十分容易。

143 十字架一个变两个

把一个希腊十字架切割成五块再拼成两个这样的十字架，大小要一样。这道趣题的解答十分美丽。

144 十字架与三角形

把一个希腊十字架切割成六块再拼成一个等边三角形。这又是一道难题，而且我在这里要说，如果不是事先知道我关于把一个等边三角形转换成一个正方形的方法（见《坎特伯雷趣题集》第 26 题），很可能解不出这道题。

145 折叠起来的十字架

用纸剪出一个希腊十字架，然后把它折叠起来，使得用剪刀沿一条直线而剪成的四片纸能拼成一个正方形。

五花八门的剖分趣题

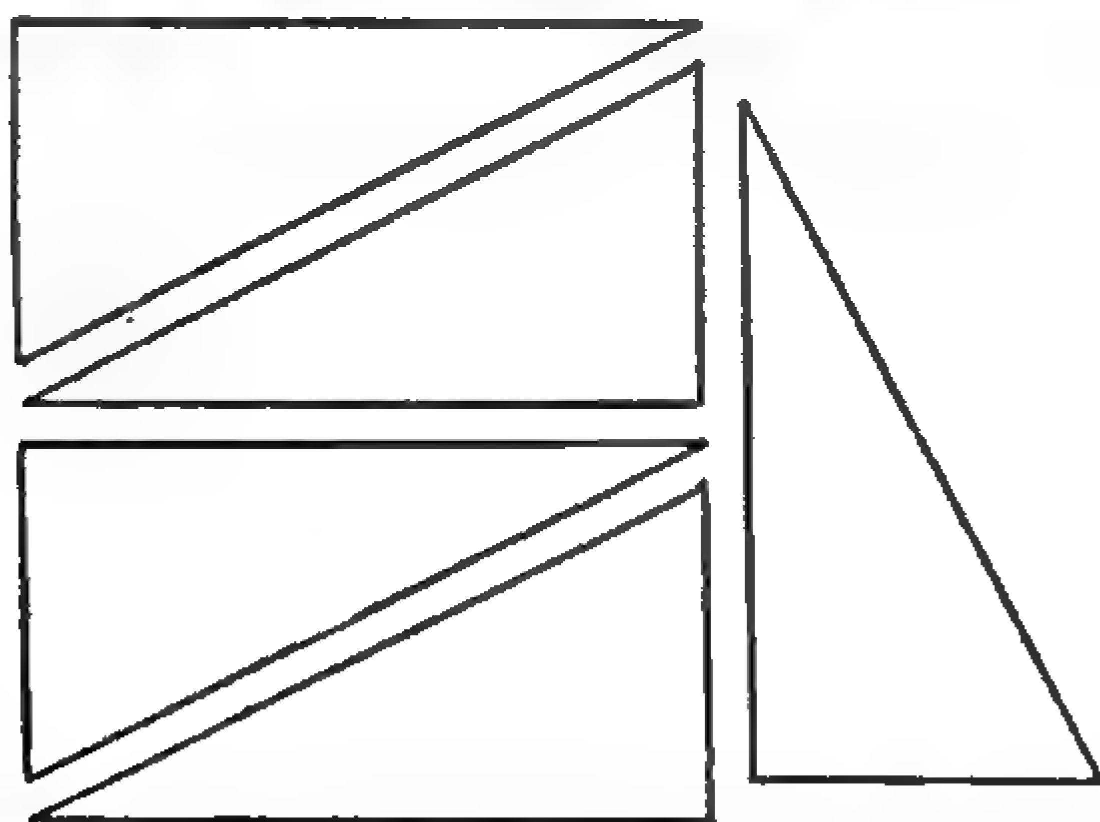
现在我们将考虑一些经挑选的裁剪趣题，它们五花八门，难易不一。

146 一道容易的剖分趣题



首先，把一张纸或一块纸板剪成如图所示的形状。立刻可以看出，它就是由一个正方形拼上另一个同样的正方形的一半（沿对角线分开）而形成的。这道趣题是要求把它切割成形状和大小都完全一样的四块。

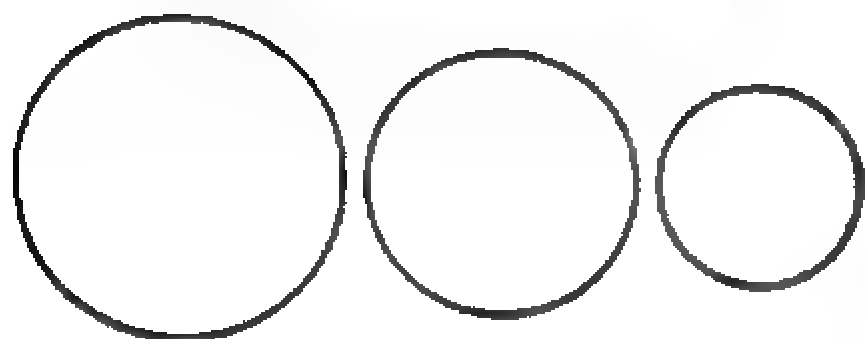
147 一道容易的正方形趣题



如果你拿一块长为宽之两倍的矩形纸板，把它沿对角线对半切开，就会得到两块形状如图所示的纸板。这道趣题是要

你用五块这种形状且大小相等的纸板来形成一个正方形。其中一块可以一分为二,但其余几块必须原封不动地用上。

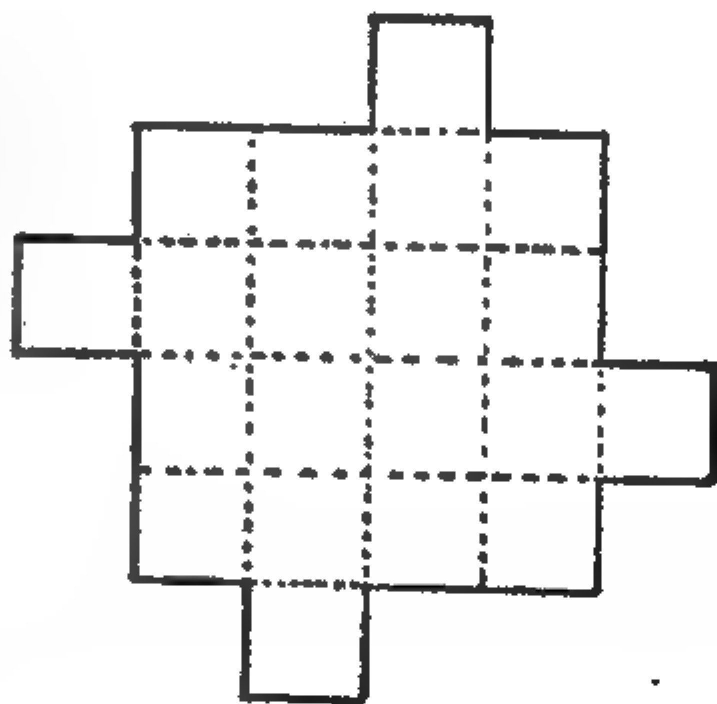
148 小圆饼趣题



这三个圆圈代表三个小圆饼。要求很简单:请说明怎样把它们平分给四个男孩。这些小圆饼必须被看成是厚度均匀的,而且它们相互厚度相等。当然,它们必须被切成尽可能少的小块。为把事情弄得简单些,我要说明一个相当令人意外的事实:只需要切成五块。由此可以看出:一名男孩得到的份额是两块,其他三名男孩的份额是每人一块。我知道这个说明有点"泄露天机",但这并不会使那些喜欢搞清楚"为什么这样"的人对这道趣题失去兴趣①。

149 分成许多方格的巧克力

这里是一块巧克力,其虚线部位刻有凹槽,这使得那二十个方格能很容易地分离开来。用纸或纸板按这块巧克力的形状剪出一个副本,然后试着把这个副本切割成九块,再拼成四个大小完全相同的正方形。

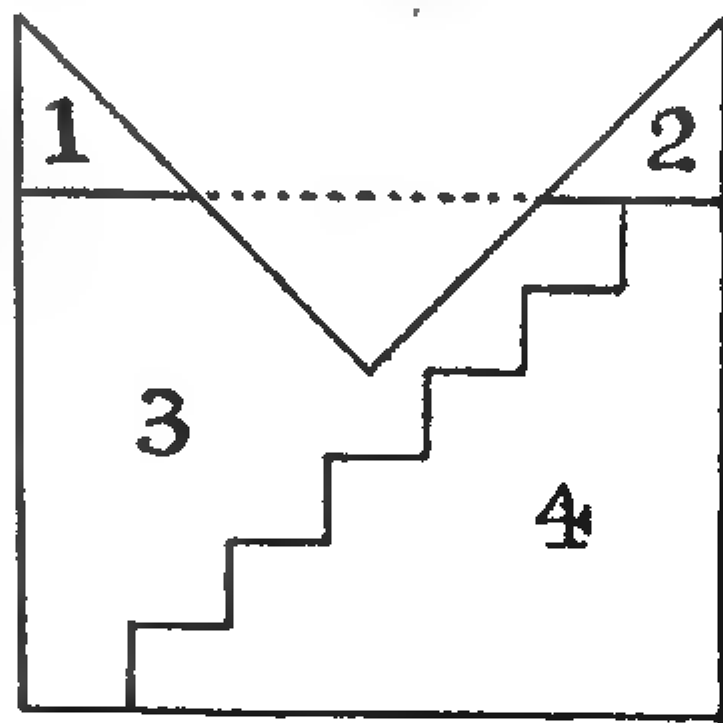


① 请读者先用把尺量一量图中那三个圆的尺寸,看看它们有什么关系,然后再动手做这道题目。——译者注

150 剖分一个主教冠



令插图中这位木匠大伤脑筋的图形代表一个主教冠。可以看到，它是一个正方形切去其四分之一而形成的。这道趣题是要求把它切割成五块再拼拢起来形成一个标准的正方形。我介绍一个发表在美国的解题尝试，它基于所谓"台阶原理"(step principle)，只用四个切割块就完成了这个业绩，但这是一个错误的解答。



它告诉我们说，首先把块 1 和块 2 切割下来，把它们拼补到虚线所连出的三角形空档中，这样就形成了一个矩形。到这里，还没什么问题。现在，它指示我们应用古老的台阶原理，如图所示，将切割块 4 下移一个台阶，即可形成所要求的

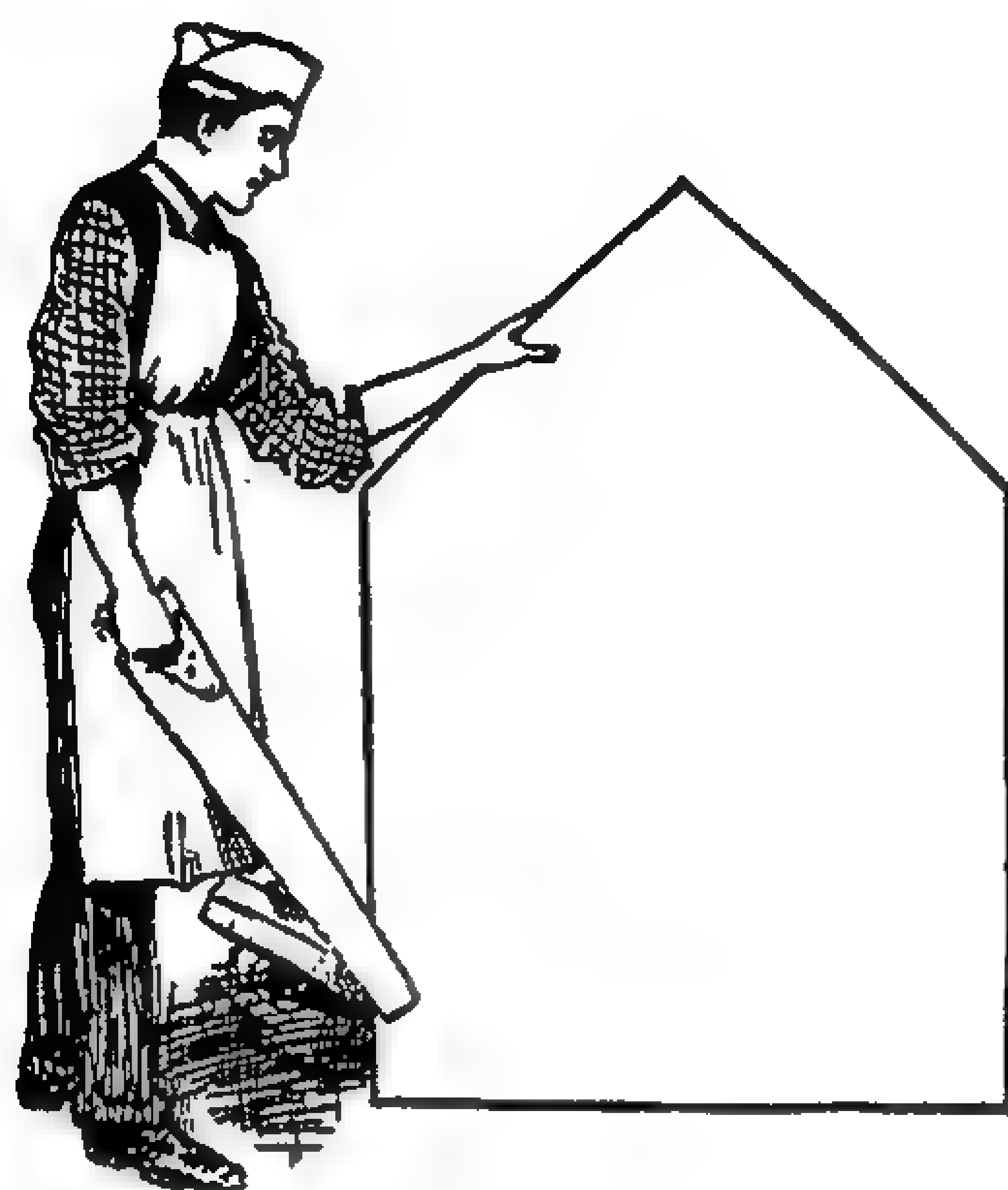
正方形。然而不幸的是，这不会产生正方形；只会产生长方形。设这个主教冠的三条长边都为 84 英寸长。那么，在切割出台阶之前，我们这个由三块拼成的矩形的尺寸是 84×63。台阶就必须高 $10\frac{1}{2}$英寸宽 12 英寸。因此，下移一个台阶后，84 英寸的边缩短了 12 英寸，而 63 英寸的边伸长了 $10\frac{1}{2}$英寸。于是我们最后得到的矩形一定是 72 英寸 ×$73\frac{1}{2}$英寸，这当然不是正方形！事实上，台阶原理只适用于具有特定相对长度之边长的矩形。举例来说，如果我们这个情况中短边为 $61\frac{5}{7}$(而不是 63)，这个台阶法就能适用了。这是因为这些台阶将是高 $10\frac{2}{7}$英寸宽 12 英寸。请注意 $61\frac{5}{7}\times 84$ 等于 72 的平方。到目前为止，只用四块的解法还没找到，而且我不相信会有这样的解法。

151 细木工的问题

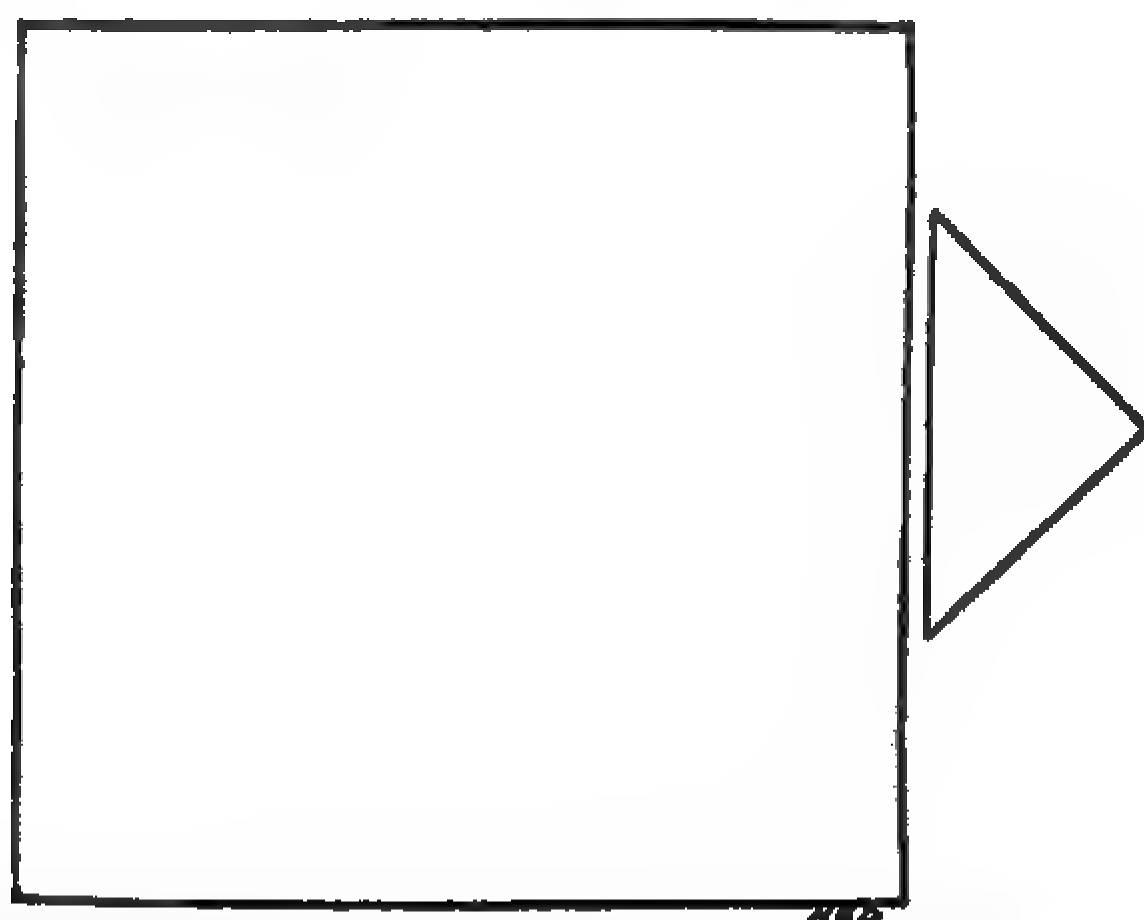
我经常有机会说到趣题的实际用途，这种实际用途体现在把我们解决娱乐性问题时学到的小技巧和“小点子”应用于日常生活事务方面。

下页插图中的这位细木工想把他手中这块木板[1]切割成尽可能少的块，以拼成一个正方形桌面，一点材料都不浪费。他该怎样做？你要他切割成几块？

[1] 请注意这块木板的形状是一个正方形拼上其四分之一。——译者注



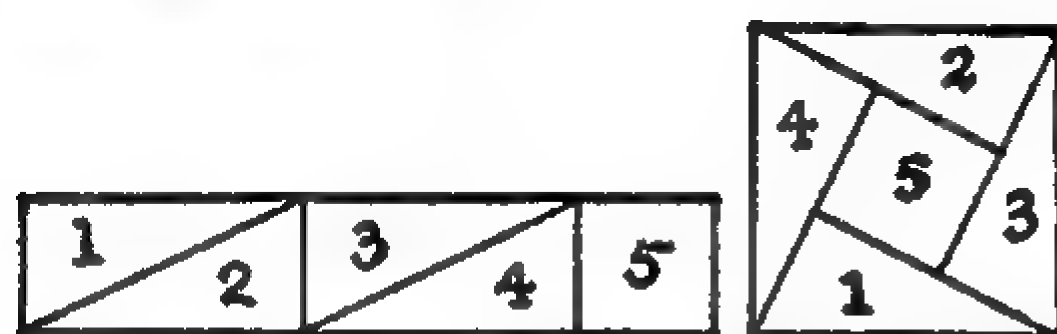
152 细木工的又一个问题



一位细木工有两块木板，其形状和相对大小如图所示。他希望把它们切割成尽可能少的块，使这些切割块能够拼拢起来，一点儿也不浪费，以形成一个标准的正方形桌面。他该怎样

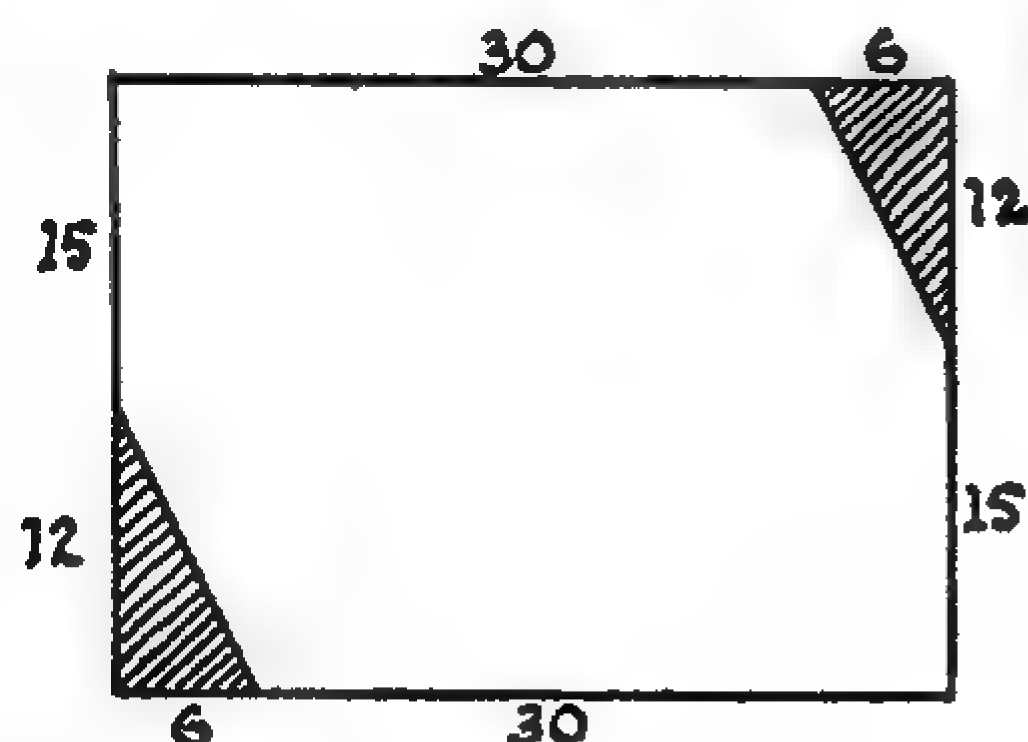
做呢？这里没有必要给出尺寸，因为那块小木板（其形状是一个正方形的一半）无论是稍大一点还是小一点，都不会影响解这道题的方法。

153 一道裁剪趣题



这儿是一道裁剪小难题。我取一纸条，尺寸是长五英寸宽一英寸，把它剪成五块，剪下的各部分拼在一起，形成了一个正方形，如插图所示。好，请找出我们怎样才能用四块做到这一点的方法，这可是一道十分有趣的题目。

154 霍布森太太的地毯

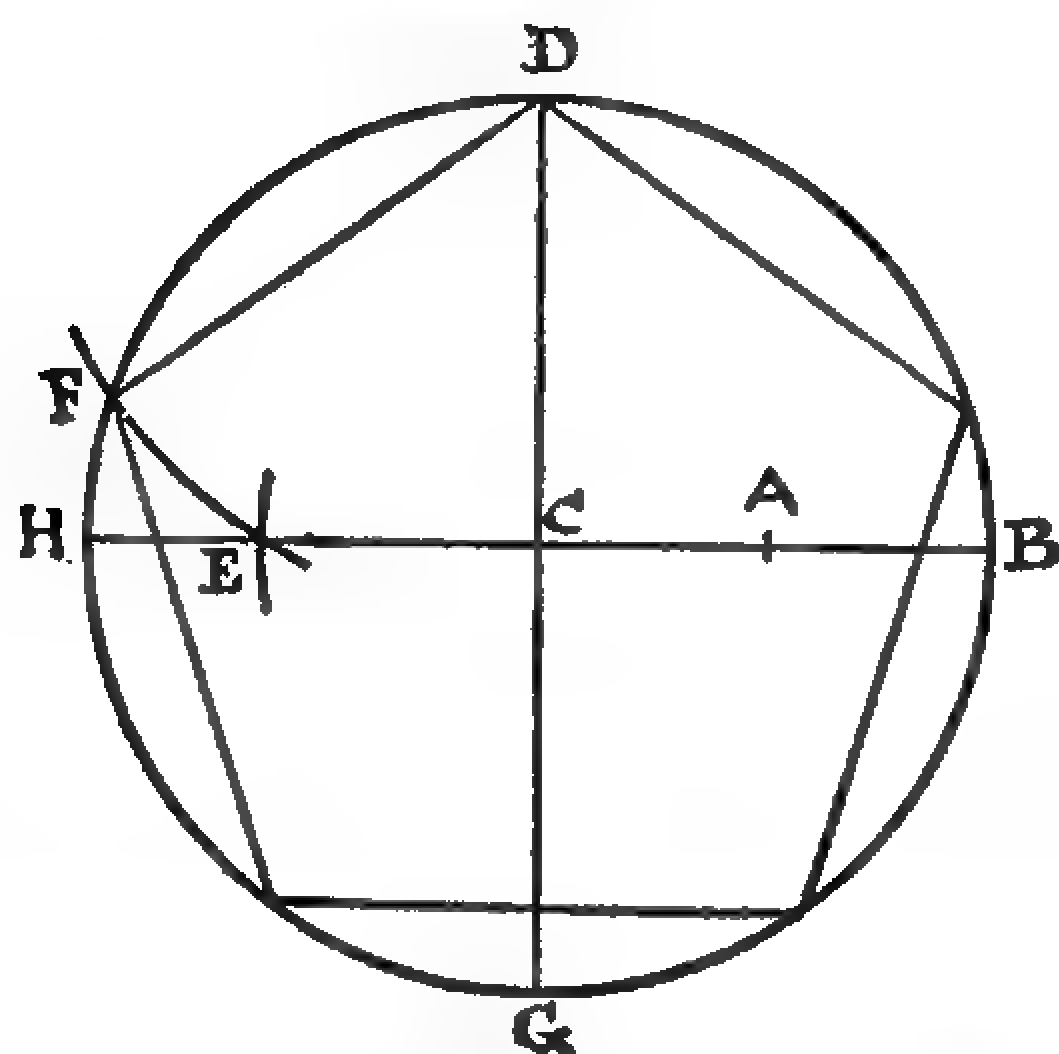


霍布森太太的儿子玩火，闯了个祸，把一块漂亮地毯的两只角烧掉了。烧坏的部分已被剪去，现在它的样子和形状如我的简图所示。霍布森太太应该怎样把这块地毯裁剪成尽可能

少的小块,再拼拢起来形成一块完整的正方形地毯?

可以看到,这块地毯的尺寸是 36×27(是英尺还是码都没有关系),每个剪去部分靠外边的尺寸都是 12 和 6。

155 五边形与正方形

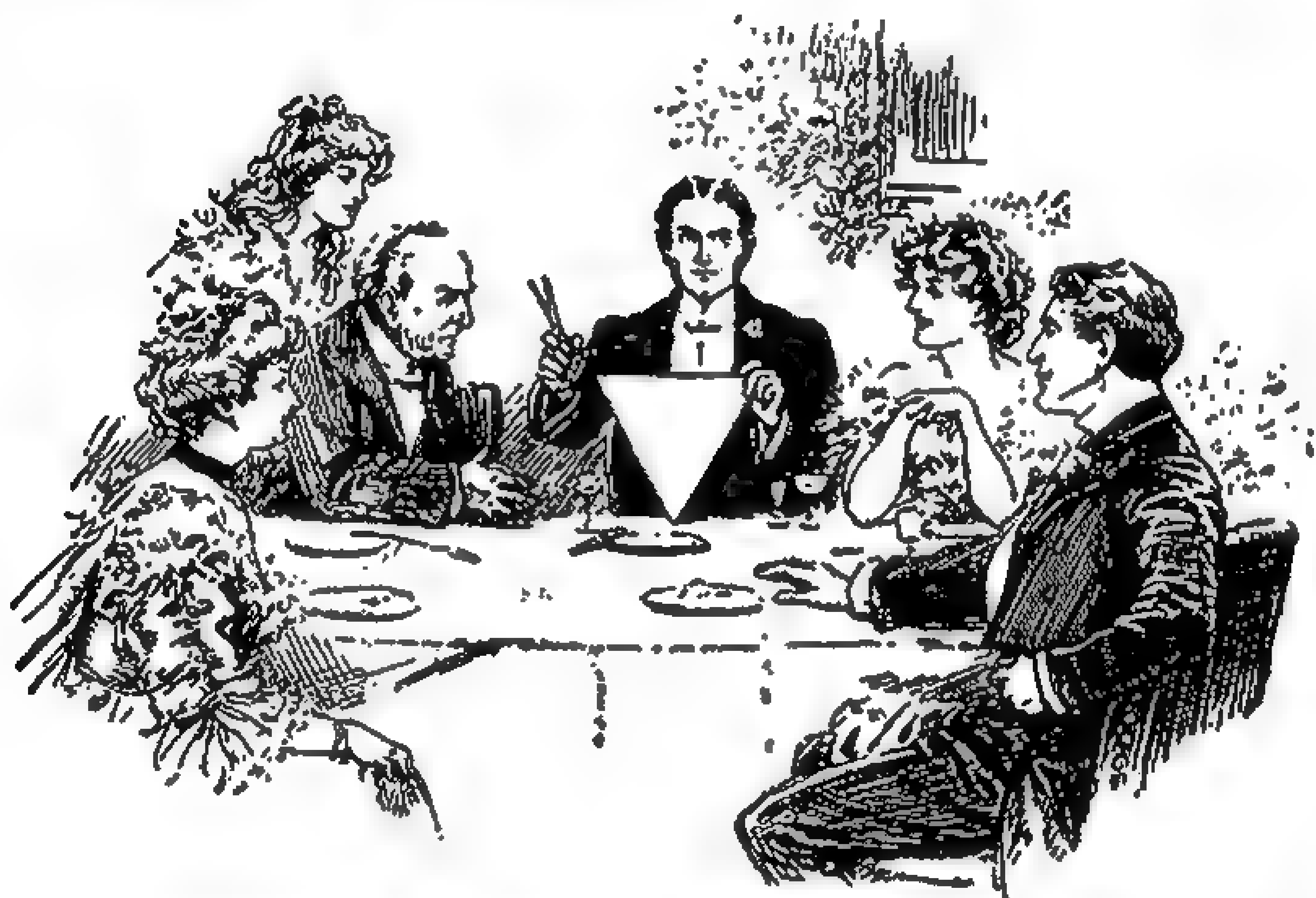


我很想知道,在我的读者当中有多少人,就像那些根本没关注过几何学基本原理的人一样,在突然被要求画一个正五边形的时候能画出它。画一个正六边形(或称正六角形)十分容易,因为人人都知道,你要做的只是画一个圆,然后以半径为其一边的边长,在圆周上标出六个点。但正五边形完全是另一回事。由于我的趣题与切割一个正五边形有关,因此我先向我那些见识不太广的读者说明一下怎样正确地画这个图形,或许会比较好。作出一个圆,然后过圆心作两条成直角的直线 HB 和 DG,如图所示。现在找出点 A,即 CB 的中点。接下来将你圆规的针尖放在 A,以距离 AD 为半径作弧,交 HB 于 E。然后将你圆规的针尖放在 D,以距离 DE 作弧,交圆周于 F。好,DF

就是你那正五边形的一条边，你只要在圆周上标出其他的边就可以了。当你知道怎样做，它就十分简单，但如果你不知道，它多少是道难题。

既然你的正五边形已经画好，这道趣题就要求你把它切割成尽可能少的块，再拼拢起来形成一个正方形。

156 被剖分的三角形



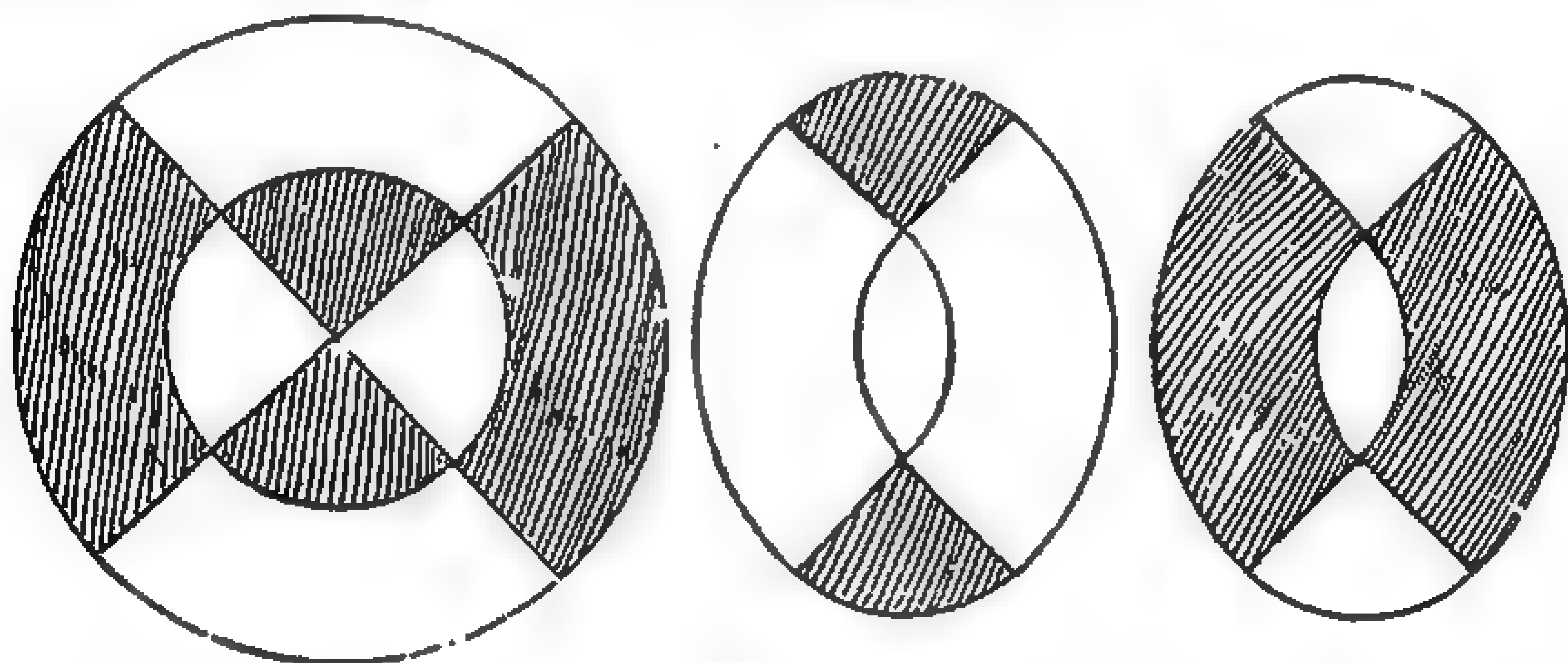
这是一道好趣题。插图中那位先生正在给他的朋友们看什么东西。他只不过从纸上剪下了一个等边三角形——就是三条边的长度都一样的三角形。他提出，这个三角形将以这样一种方式被切割成五块：它们拼拢起来，既可形成两个较小的等边三角形，也可形成三个较小的等边三角形，不论哪种情况，所有的材料都得用上。你知道应该怎样进行切割吗?

记住，当你制成了你那五个切割块时，你必须如所期望的那样，既能把它们放在一起形成原来的单个三角形，也能形成两个

三角形,也能形成三个三角形——它们都是等边三角形。

157 桌面与凳面

我经常有机会表明,许多极其古老极其著名的趣题的已发表答案,不是错到家了,就是还有改进的余地。我建议考虑这个关于桌面与凳面的老难题,我的大多数读者可能在为儿童娱乐所编的书中看到过它的这种或那种形式。



这故事说,有一次,一位既节俭又足智多谋的校长希望把一张没有用的圆桌面改造为两张卵形的凳面,每张凳面的中央都有一个手孔。他指示木匠按插图进行切割,然后用所示方法把那八块木板拼起来。他对他这个天才表现的印象是如此深刻,以致他在几何课上把这道趣题定为剖分方面的一项小研究。但是这故事的余下部分从来没公开过,据说是因为,私立中学的校长们从不愿意承认有错,这是他们的一个特色。当初有位男孩完全有理由在这件事中引起人们注意,我是从这男孩的一名后代那儿得到有关信息的。

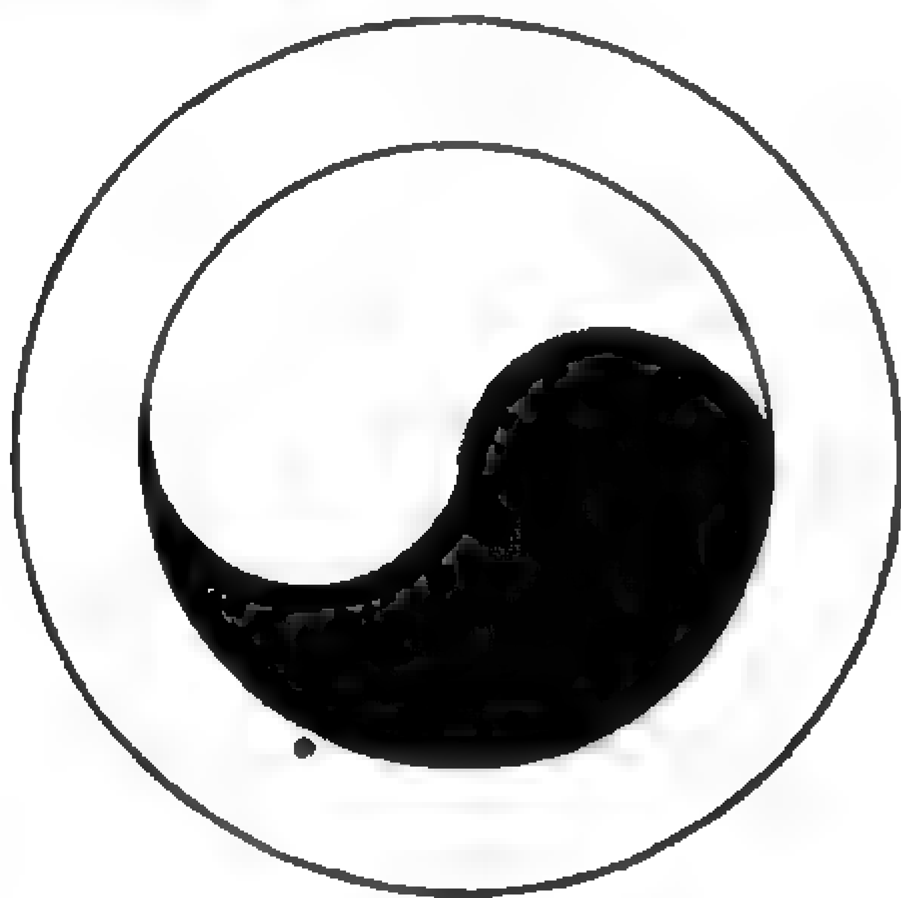
这位聪明的年轻人谦恭地向校长提出,那个手孔太大了,个头小的孩子可能会穿过它掉下去。他因此建议用另一种切割方法,以克服这个缺陷。由于他的傲慢无礼,他得到了如此严厉的

惩罚，以致他转变了看法，确信这凳子上的手孔越大，坐起来就越舒服。

好，这男孩建议的方法是什么？

你能不能说明怎样把这圆桌面切割成八块再拼拢起来形成两个卵形凳面（大小和形状完全一样），而且它们都有一个形状相同的手孔，其尺寸比上面所示的要小？当然，所有的木材都要用上。

158 伟大的太极图



这儿是一个极其古老的标志，引人注目。它印在朝鲜王国[1]的国旗和商船旗上，并被北太平洋铁路公司采用为一种商业标牌，但是可能没几个人知道它就是太极图，如下面这张草图所示。这个标志对于中国人来说就像十字架对于基督徒那样。

---

[1] 1392—1910 年，朝鲜半岛上的统一国家是朝鲜王国，其中 1897 年曾改国名为大韩帝国，至 1910 年被日本"合并"。本系列《萨姆·劳埃德的数学趣题续编》第 53 页上的译法及译者注似有误。——译者注

它是造物主和永生的标志，而由那个圆所分成的两个部分叫做“阴”和“阳”——宇宙间的阴柔之力和阳刚之力。据传，三千多年前的一位进行这方面研究的学者在谈到它时说：“无极生太极，太极生两仪，两仪生四象，四象演伏羲的八卦方图。”我希望读者们不要叫我对此作解释，因为我一点儿也不知道这里的意思。但是我相信，经年累月，这个标志对于研究秘传教义的学者已经具有了神秘的和可能是数学上的意义。

我就太极图的原始形式对它进行介绍。这里有三个关于这个伟大标志的问题：

(1)包含着“阴”和“阳”的内圆面积大，还是外环的面积大①？

(2)仅作一次切割，就将“阴”和“阳”分成大小和形状一样的四块②。

(3)沿直线作一次切割，将“阴”和“阳”分成大小一样而形状可以不一样的四块。

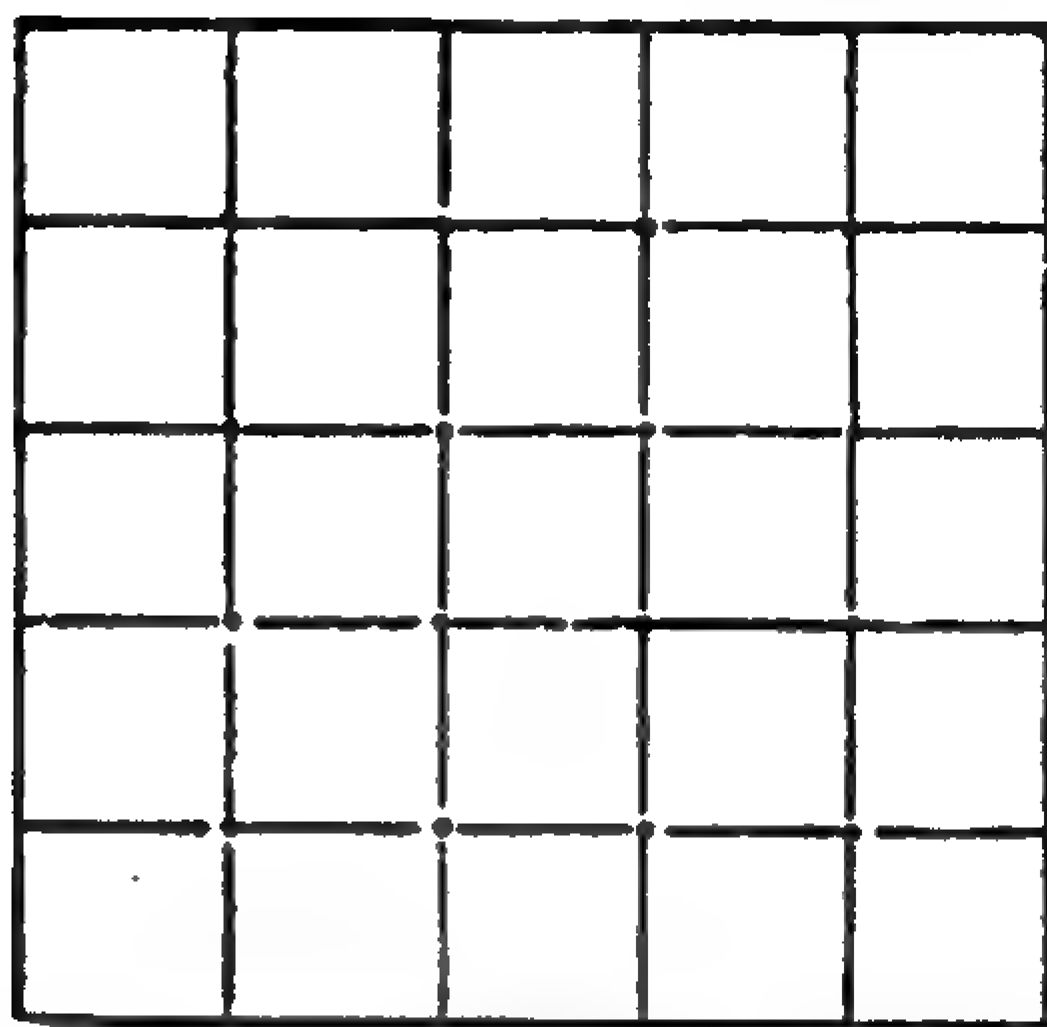
159 正方形装饰板

下页插图表示了我所拥有的一块木板，5英寸见方。在上面画了一些标示线后，它被划分成二十五个1平方英寸的小方格。我想方设法，要把这块木板切割成尽可能少的块，然后拼拢起来形成两个大小不同但尺寸得让人知道的标准正方形。但是很倒霉，在那两线相交形成的十六个交点处，不知什么时候都

---

① 要回答这个问题，须知这个太极图的外圆是其内圆的外接正方形的外接圆。——译者注

② 请注意分隔阴阳的界线是由内切于内圆的两个同样大小且相切的圆的半圆周连接而成的。——译者注



打进了一颗钉子，而我的线锯一旦碰上这些钉子，就会遭到损坏。因此我得找出一个方法，让我不必锯过这十六颗钉子的任何一颗就能做成这件事。这该怎么做呢？记住，必须给出那两个正方形的准确尺寸。

160 两块马蹄铁

为什么马蹄铁应该被认为是“有运气的”，这是那些没人能理解的事情之一。这是一个非常古老的迷信。奥布里[1]说：“伦敦西区的大多数房屋在门槛上都有块马蹄铁。”在蒙茅斯街，1813 年有十七块，迟至 1833 年，还有七块。甚至纳尔逊勋爵[2]也在“胜利”号舰船的桅杆上钉了一块。如今，我们发现

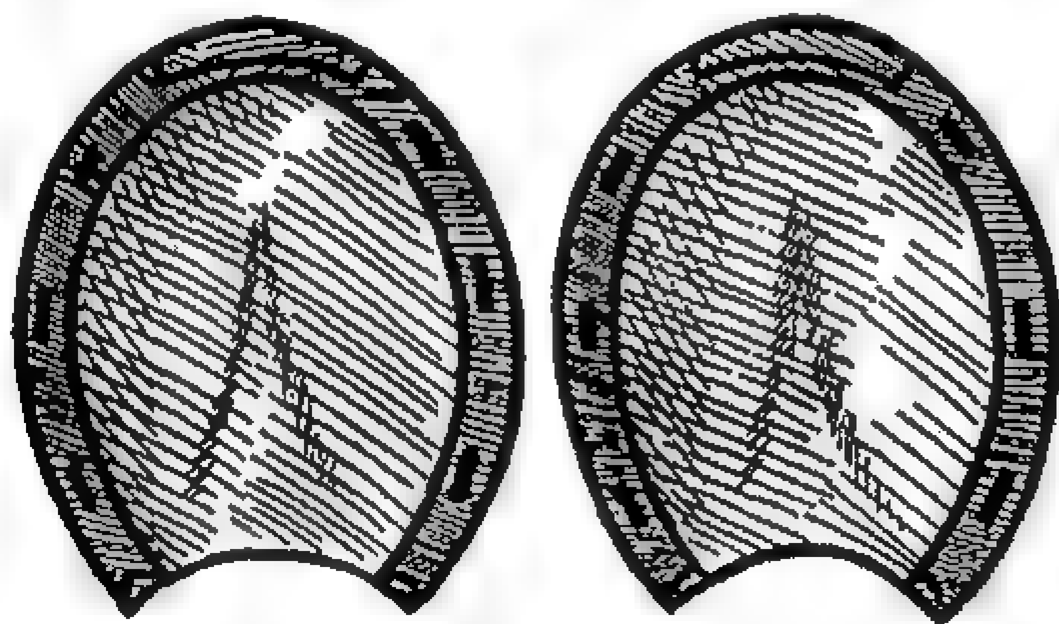
---

① 约翰·奥布里(John Aubrey，1626—1697)，英国文物研究者和作家，擅长传记小品。——译者注

②纳尔逊勋爵(Lord Nelson，1758—1805)，英国著名海军统帅，在 18 世纪英国与法国和西班牙争夺海上霸权的战争中战功卓著。——译者注

它更是有助于人们取得“好运气”，因为我们看到，在我们准备驾驭的马的蹄子上，都牢牢地钉着马蹄铁。

不过，就马蹄铁被用来象征健康、发达和对人们的善意（如同我不时有机会予以研究的万字饰及其他标志那样）而言，我们完全可以带着一定的敬意和兴趣来对待它。况且，难道就不会有某些秘传的或者失传的数学秘密隐藏在这马蹄铁的形状之中吗？我对此进行了一番探索，并且我希望引起我的读者对这样一个很是不同凡响的事实的注意：如插图所示的这样一对马蹄铁，以一种令人惊奇的、美丽的方式，与圆这种代表永生的符号有关系。我以一道简单题目的形式提出这个事实，以使人们可以看到，这种关系是怎样经年累月巧妙地隐藏下来的。我知道，当我的读者找到了通向这秘密的钥匙时，他们会很高兴的。



将这两个马蹄铁图形沿轮廓线小心地切割下来，然后把它们切割成形状各不相同的四块，再拼拢起来形成一个标准的圆。每个马蹄铁图形都必须切割成两块，包括在轮廓线以内的马蹄的所有部分都要用上，并被看作是这块区域的组成部分①。

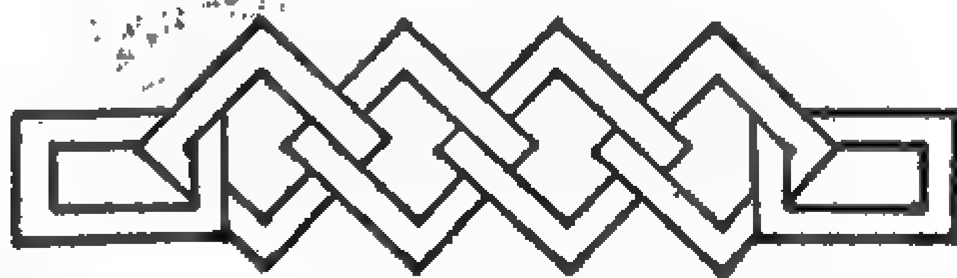
① 应当对这个马蹄铁图形的边界曲线给出准确的数学描述：它的左右两侧是两条半径相同、弧度均为90°的圆弧，上下也是两条半径相同、弧度均为90°的圆弧，但其半径为左右那两条圆弧的一半。——译者注

161 贝齐·罗斯[1]的趣题

有一封来信要求我提供一道老趣题的解答。这道趣题是费城的一位名叫贝齐·罗斯的人提出的，她曾向乔治·华盛顿演示过解决这道题的方法。它要求把一张纸折叠得能一剪刀就剪出个象征自由的五角星来。这个关于这道题起源的说法是不是真的，我说不上来，但是我有一张据说是那位女士在费城曾住过的老房子的照片，我想它现在仍屹立在那儿。不过我的读者无疑会对这道小难题感兴趣。

取一张圆纸片，把它折叠得能使你一剪刀就剪出一个标准的五角星来。

162 纸板链条



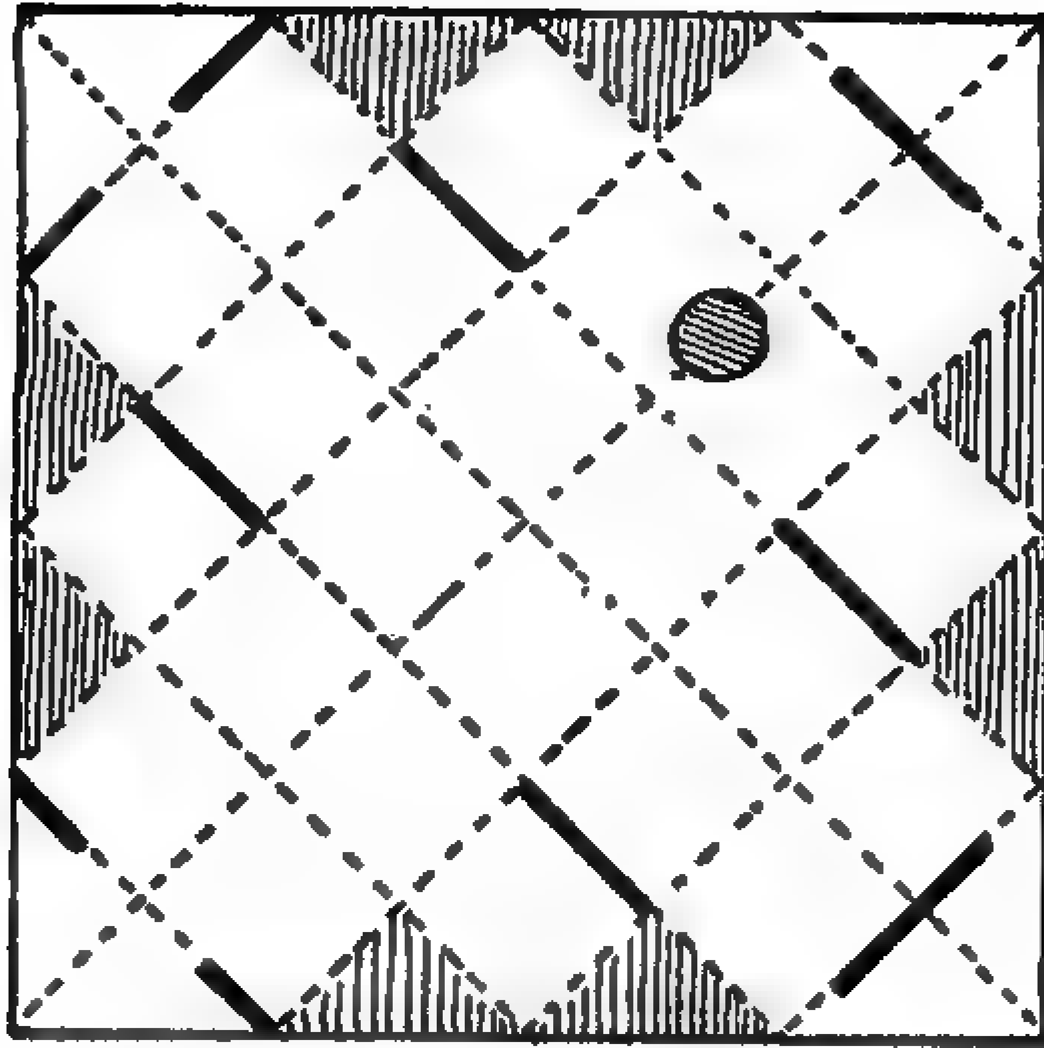
你能不能从一张硬纸板上割下这样一根什么粘连都没有的链条？每个环都是完整的，没有什么地方是割断了又连接起来的。这是一道我在孩童时代就晓得的有趣的老题目，但是关于它的发明者，我一无所知。

163 纸　　盒

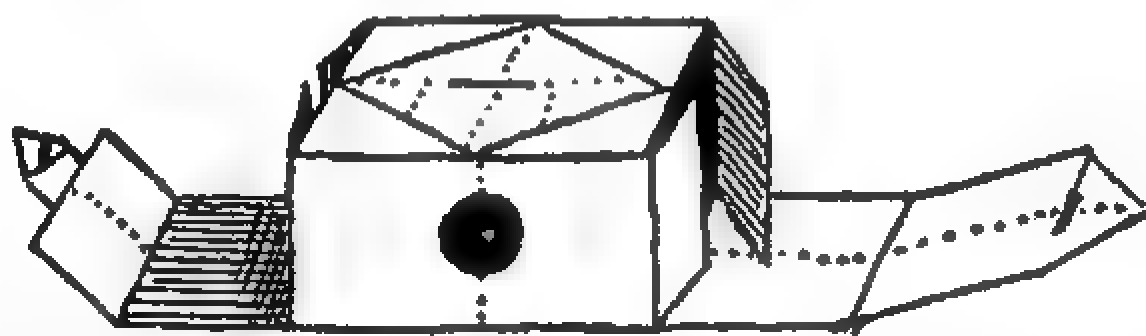
在这里介绍一种制作纸盒的巧妙方法，或许会令人感兴趣，虽然严格地说这并不是一道趣题。

---

[1] 贝齐·罗斯(Betsy Ross)，全名伊丽莎白·格里斯科姆·罗斯(Elizabeth Griscom Ross，1777—1836)，据说美国的第一面国旗就是她缝制的。——译者注



取一张正方形的厚纸，反复折叠，把插图中虚线所示的折痕全部折出来。然后切去那八个用阴影线表示的小三角形，并沿着粗黑线把纸割穿。下面这第二幅插图显示了折到一半的盒子，读者不难将这个盒子完全折好。在折起来之前，读者可将图中所示的那个小圆片割下来，为什么要这样做，我这就解释。



你会发现，这个盒子可用来极其美妙地产生涡环。这种在1858年被亥姆霍兹[①]论述过的涡环，很是有趣，而这个（开了个洞的）盒子会把它们完美地产生出来。对着那个洞轻轻地吐一

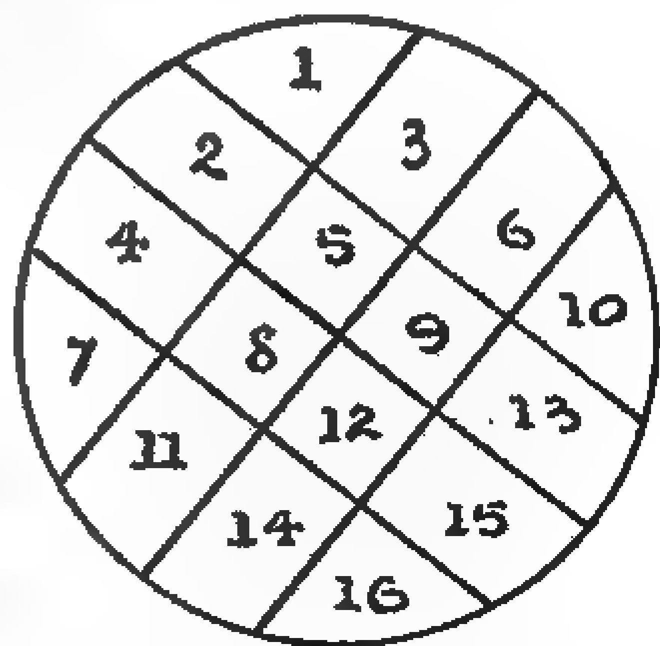
① 赫尔曼·路德维希·费迪南德·冯·亥姆霍兹（Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz，1821—1894），德国物理学家和生理学家，论证并发展了能量转化与守恒定律。——译者注

口香烟,让盒子里充满烟气。好,你将盒子平端,轻轻敲打洞对面的那一侧,大量完美的涡环就由那口烟产生出来。房间里最好没有气流。人们往往不知道,在空气中形成这种涡环其实是用不着香烟的。香烟只是使它们能被人们看见而已。现在,如果对其中的一个涡环在一路上予以适当的引导,那么它就会穿过房间,把一支蜡烛给灭了。如果你能够设法不用香烟做到这一点,那么这一壮举就更是令人叹为观止。当然,经过一些训练,就能用嘴直接吹出涡环,但是用盒子把它们产生出来则更显完美,而且什么技巧都不需要。开尔文勋爵①提出过一个理论,认为物质世界可能是由处于一种充满整个空间的流体之中的涡环构成的,而且利用这种假设的一个进一步的结论,他能解释化学中的化合作用。

164 薯片趣题

取一片圆薯片,放在桌上,用一把小刀切割六下,看你能把它切割成多少块。当然,每次切割后,你不能调整小块的位置,更不能把它们叠起来。你最多能切成几块?

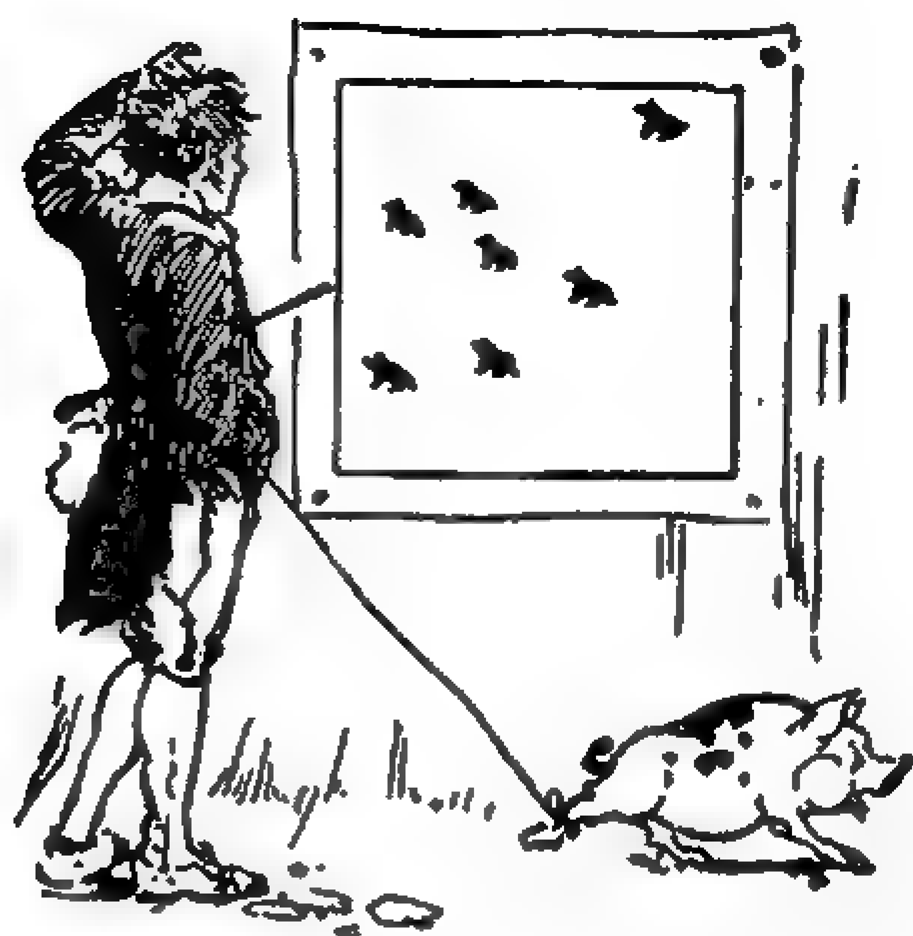
这幅图显示了切成十六块的方法。当然,这个纪录很容易打破。



165 七头猪

这儿有一道小趣题,那天我把它出给爱尔兰人的一个儿子做,结果把他

① 开尔文勋爵(Lord Kelvin),即威廉·汤姆生(William Thomson,1824—1907),著名英国物理学家,热力学奠基人之一。——译者注



给难住了，这可真是不应该，因为这道题确实非常容易。从这幅插图可见，他看着一张画着一个正方形猪圈的草图，猪圈里有7头猪。题目要求他用三道笔直的栅栏分割这个猪圈，使得每头猪分别被围在一个小猪圈里。换句话说，你只要拿起铅笔，画上三条贯穿这个正方形的直线，分别把每头猪围起来。没有比这更简单的了。

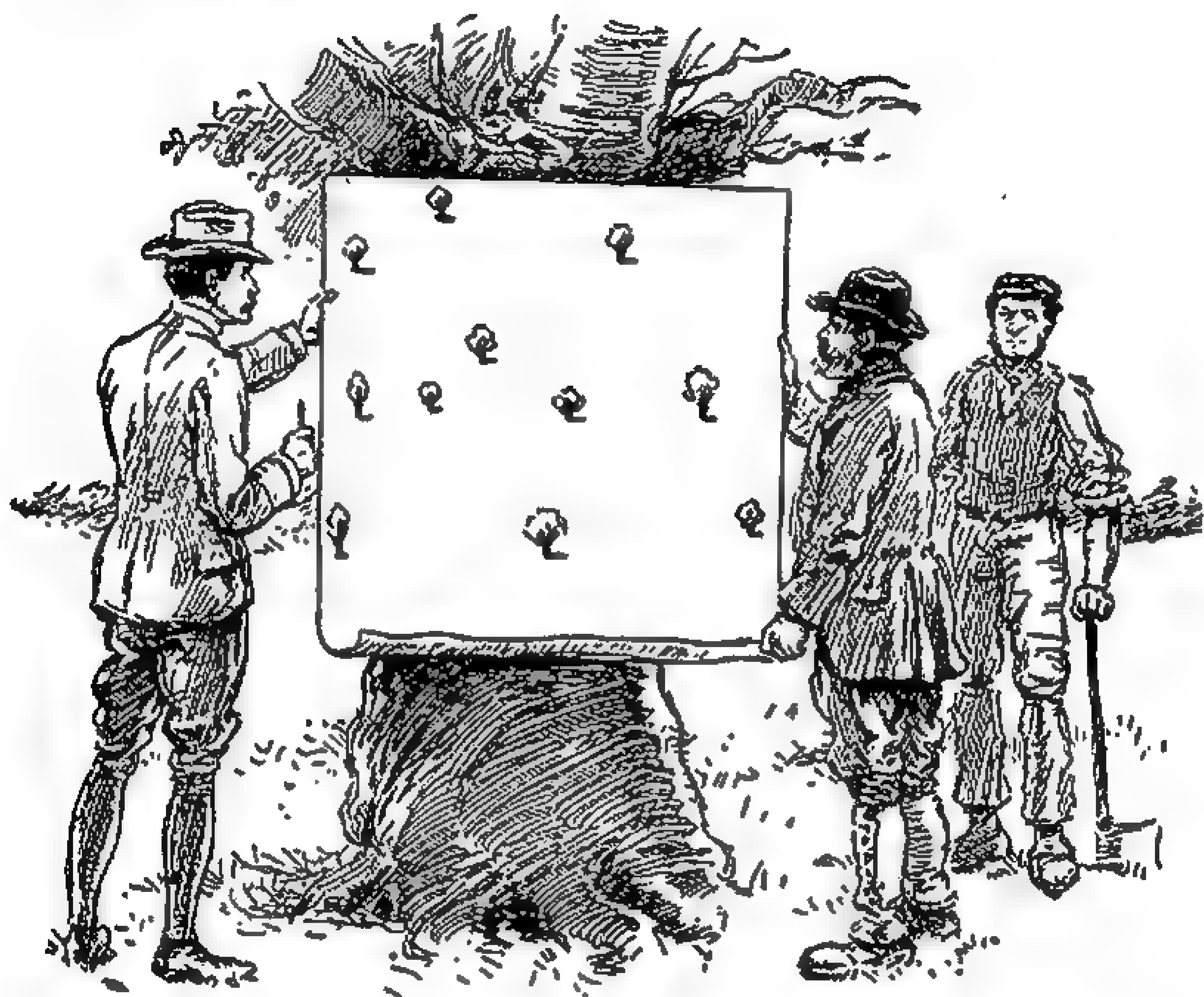
这个爱尔兰人抱怨说，在他竖栅栏的时候，这些猪可不会安静地呆在原地。他说它们会挤成一团，或者其中一个顽固的家伙会跑到一个角落，把所有的猪都召集到自己的身边。我向他指出，这只不过是一道趣题，可假设这些猪都是"静止不动的"(stationary)。他回答说爱尔兰的猪可不是"文具"(stationery)——它们是猪肉。经我说服，他总算答应试一试。他画了三条直线，其中有一条线切割到一头猪。我说这是不允许的，他争辩说一头猪要割断喉咙才能派上用场。"老天作证！如果你们想要的是熏咸肉，又不把猪切割开来，那就全是熏咸腿了[1]。"我

---

[1] 原文为 it will be all gammon，又义"那就全是胡说八道了"。——译者注

们不会带有偏见地认为这个蹩脚的双关语是这个爱尔兰人故意说的。但是,他到底没能把这道趣题解出来。你能解吗?

166 地主的篱笆

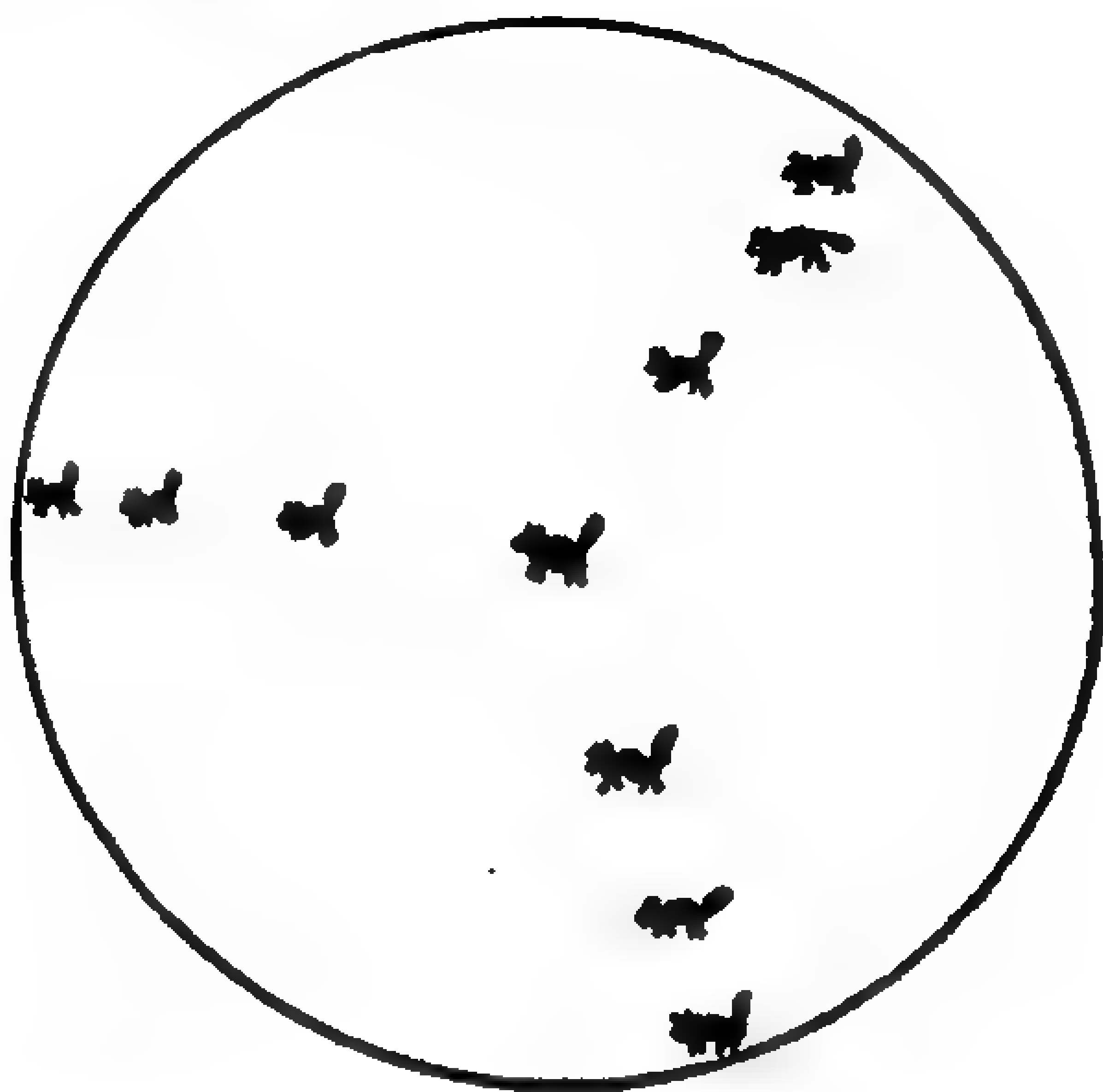


图中这位地主正在与他的管家商讨一个有点伤脑筋的小问题。他有他一块土地的一张大平面图,上面有十一棵树。现在,他想用几道笔直的篱笆把这块地正好划分为十一个围场,使得每个围场有一棵树,让他的牛儿歇个脚避个雨。他怎样才能用尽可能少的篱笆[①]来做到这一点?拿起你的铅笔,一条一条地画上贯穿这块地的直线,直到你分隔出(不多不少)十一个围场,然后看看你需要几道篱笆。当然,这些篱笆可以相交。

---

① 指篱笆的道数,而非篱笆的长度。——译者注

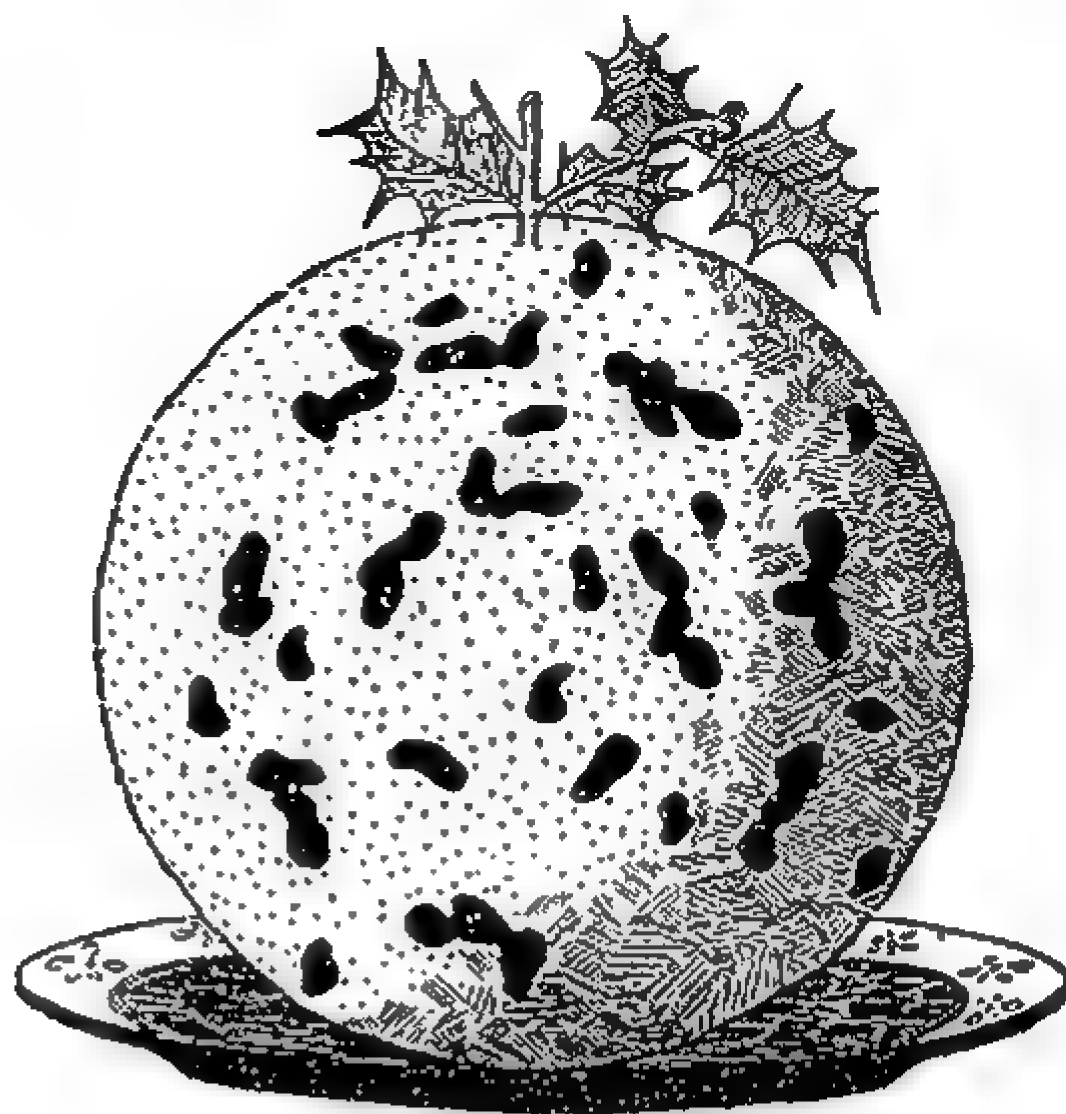
167 魔法师的猫



如我们的插图所示，一位魔法师在一个魔圈里放了十只猫，并向它们施了催眠术，使它们按他的意愿保持不动。然后他提出要在这个大魔圈里画三个小魔圈，使得每只猫都不能与其他的猫接触，除非它跨过一个小魔圈。请你画出三个圆圈，使得每只猫都有自己的圈地，而且不跨过边界就不能进入其他猫的圈地。

168 圣诞布丁

“说到圣诞布丁，”主人说，他看了一眼这份放在桌子那一头的精美糕点，“使我想起了一件事。那天我的一位朋友给了我一道关于它的新趣题。就在这儿。”他说着把手伸进自己胸前的口袋。



"'问题:求出它的馅儿',我猜想。"那个在伊顿公学[1]念书的男孩说。

"不,那要吃了才知道。我给你念一念题目的条件。"

"'将这布丁切割成两部分,这两部分的形状和大小都一样,切的时候不能碰到任何一粒葡萄干。这布丁应被看作一个圆片而不是一个圆球。'"

"你凭什么把圣诞布丁看作圆片?一个有理智的人凭什么要进行这样一种精确的分割?"一位愤世嫉俗者问道。

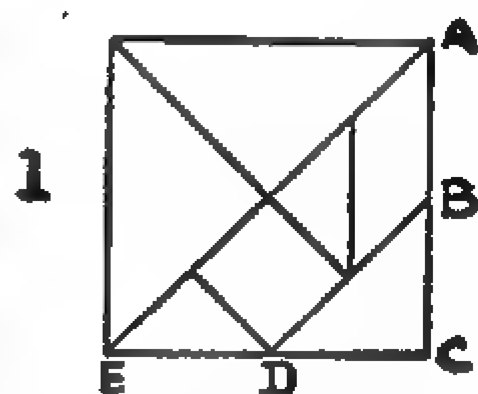
"这只是一道趣题——一种剖分问题。"

大家轮流看了一下这道题目,但是没人能解出它。这是有点儿难的,除非你了解制作这种布丁的有关原理。但如果你知道它是怎么做出来的,那就很容易了。

① 英国著名的贵族中学,位于伦敦之西的伊顿镇,1440 年创办,只收男生,毕业后多进入牛津、剑桥等大学。——译者注

169 一个七巧板悖论

几百年来，许多非常古老的消遣活动，例如象棋，经历了如此多的发展和变化，以致它们最初的发明者几乎都认不出它们了。但对七巧板（tangram）来说，情况并不是这样。这个看来至少有四千年历史的游戏，显然从未受到过冷遇，而且自从传说中的中国人 Tan① 首先如图 1 所示那样切割出七块小板以来，也没有被人做过改动或者说“改进”。如果你注意到点 B 是一任意大小的正方形的一边 AC 上的中点，而点 D 是其邻边 CE 上的中点，那么切割线的走向就清楚得不需要再做任何说明了。这篇短文中的每一个造型，都是用七块这样的黑纸板构成的。马上就可明白，可能的组合是无穷无尽的。

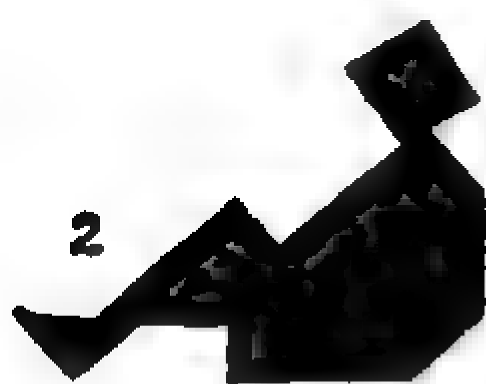


已故的纽约人萨姆·劳埃德（Sam Loyd）先生出版过一本小册子，其中都是非常巧妙的造型，他拥有已故的查列诺尔（Challenor）先生的手稿，后者对七巧板进行过长期而仔细的研究。据说，这位先生记载道，原来有着七卷关于七巧板的书，是基督纪元前二千年在中国编纂的。这些书如此珍稀，以至于他在这个国家待了四十年，也只看到第一卷和第七卷的完整版本以及第二卷的残本。其中有一本的若干部分，是用金箔印在羊皮纸上的，由一名英国士兵在北京发现。他把它卖了三百英镑。

---

① 七巧板在西方称作 tangram，而且它源自中国，故作者在此说七巧板可能是一个叫作 Tan 的中国人发明的。关于 tangram 一词的来源，有多种说法，译者以为以下两种比较合理：(1) 源自 tang（唐）+ gram（图），旧时海外诸国称中国为“唐”，此词即“中国拼图”的意思；(2) 源自 tanka game，tanka 即“蜑家”，中国岭南地区的水上人家，他们在运送乘客时还提供娱乐服务，包括这种七巧板。——译者注

几年前,我收藏了一本小册子。它来自已故的卡罗尔[①]的私人图书馆,书名是《当前流行的中国趣题》(*The Fashionable Chinese Puzzle*),其中包含了323个七巧板造型,大多数是难以描述的几何图形,都用那七块板构成。它"由斯金纳街42号的沃利斯父子(J. and E. Wallis)和锡德茅斯海洋图书馆的小约翰·沃利斯(J. Wallis, Jun.)出版"(锡德茅斯在南德文郡)。没有出版年月,但下面这段注记可将出版时间相当接近地确定下来:"这个巧妙的发明在过去某段时间曾经是前皇帝拿破仑所喜爱的娱乐活动。他当时处于一种无权无势的状态,过着离群索居的生活,于是每天把许多时间花在这上面,以培养他的耐心,操练他的智慧。"就像这位伟大的被流放者那样,读者将发现,从构造别人给出的造型中会获得巨大的乐趣,而且这种乐趣总的来说是不无教益的。他将发现,这篇短文的插图中有许多是很容易构造的,但有一些则相当难。因此每一幅图形都可看作一道趣题。



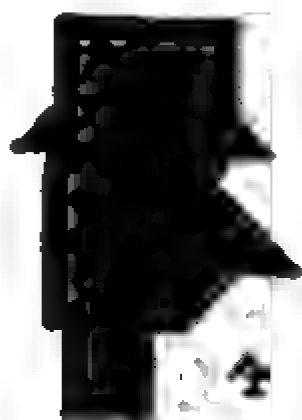
但是,发明出原创的、具有一种图形特色的新造型,完全是另一种消遣活动;而用七巧板能产生的反映真实生活的图形,其形式之丰富,范围之宏大,着实令人惊奇。诚然,这种图形多角多棱,而且往往怪模怪样,但它们富有特色。我给出一个斜躺人形的例子(图2),其姿势极其优雅,只要稍稍去掉上面的一些角突,就可得到一个完全令人满意的轮廓。

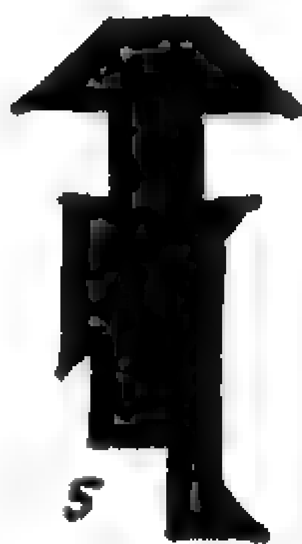
---

① 刘易斯·卡罗尔(Lewis Carroll),真名查尔斯·勒特威奇·道奇森(Charles Lutwidge Dodgson, 1832—1898),英国牛津大学数学讲师,世界著名的儿童文学作家,作品有《爱丽丝漫游奇境记》等。——译者注

既然我提到了《爱丽丝漫游奇境记》(*Alice in Wonderland*)的作者,我就再给出我的三月兔造型(图3)和帽匠造型(图4)[①]。我还要给出对拿破仑造型的一个尝试结果(图5),以及劳埃德先生那绝妙的北美印第安人和他老婆(图6和图7)的造型。还有大量的造型,可在《海滨杂志》1908年11月号上我的一篇文章中找到。







我这篇杂志上的文章一面世,现已作古的著名哲学家詹姆斯·默里爵士[②]就以贯穿于他全部工作的那种惊人的勤奋,着手探究 tangram 一词的来源。最后,他如下写道:"……我的一个儿子在天津新学书院(Anglo-Chinese College at Tientsin)做教授。通过他、他的同事,以及他的学生,我可以在中国学者中打听这位所谓 Tan 的情



① 三月兔和帽匠均是《爱丽丝漫游奇境记》中的人物。——译者注

② 詹姆斯·奥古斯塔斯·亨利·默里爵士(Sir James Augustus Henry Murray, 1837—1915),英国哲学家和词典编纂家,《牛津英语词典》(*Oxford English Dictionary*)的第一任主编。——译者注

况。我们这儿(牛津)的那位中国教授对此事也很感兴趣,他从伦敦中国公使馆的秘书那儿取得信息。这位秘书是中国知识界的一位非常杰出的代表。

结果表明,在中国的文学、历史以及文化传统上,完全不知道有个叫 Tan 的人,或者有个叫 Tan 的神,或者有过什么'Tan 书'。对于大多数的有识之士来说,这些对象的名称,或者断言这些对象存在的说法,他们从来都没有听到过。当然,这个智力游戏是众所周知的。它在汉语中称为'七巧图'(ch'i ch'iao t'u),逐字解释,就是'七幅巧妙的图',或者'用七块板动足脑筋而巧妙地拼起来的图形'。在汉语中,没有什么单词接近于 tangram 或者 tan。对于后者来说,仅仅能联想到汉语中的'摊'(t'an),即'铺展'(to extend),或者'唐'(t'ang),广东方言称'中国'为'唐'。这提示我们,可能有某位懂一点中国话或者广东话的美国人或英国人,想给这个智力游戏取个名称,于是把这两个词中的一个同欧洲语言的词尾 gram 拼起来造了一个词。我可以说,tangram 这个名称可能是一个美国人在 1864 年之前和 1847 年之后的某个微不足道的时间创造的,但是我在 1864 年版韦氏词典[①]出版之前的印刷品中却找不到它。因此我不得不在我的词典中非常简要地处理这个词,说一说它适用于什么地方,对这个名称人们作了什么猜测或设想,并给出几个引用的例句,其中有一句取自你那篇文章,这使得我对这个词条所做的工

① 指《美国英语词典》(*American Dictionary of the English Language*)。其最早版本由美国作家诺厄·韦伯斯特(Noah Webster,1758—1843)编纂(故称韦氏词典),于 1828 年出版。此后在 19 世纪的重要版本有 1847 年的修订新版和 1864 年的修订扩充版,以及 1890 年改名为《韦氏国际词典》(*Webster's International Dictionary*)的版本。从默里爵士的说法可知,1847 年版的韦氏词典无 tangram,而 1864 版的有。——译者注

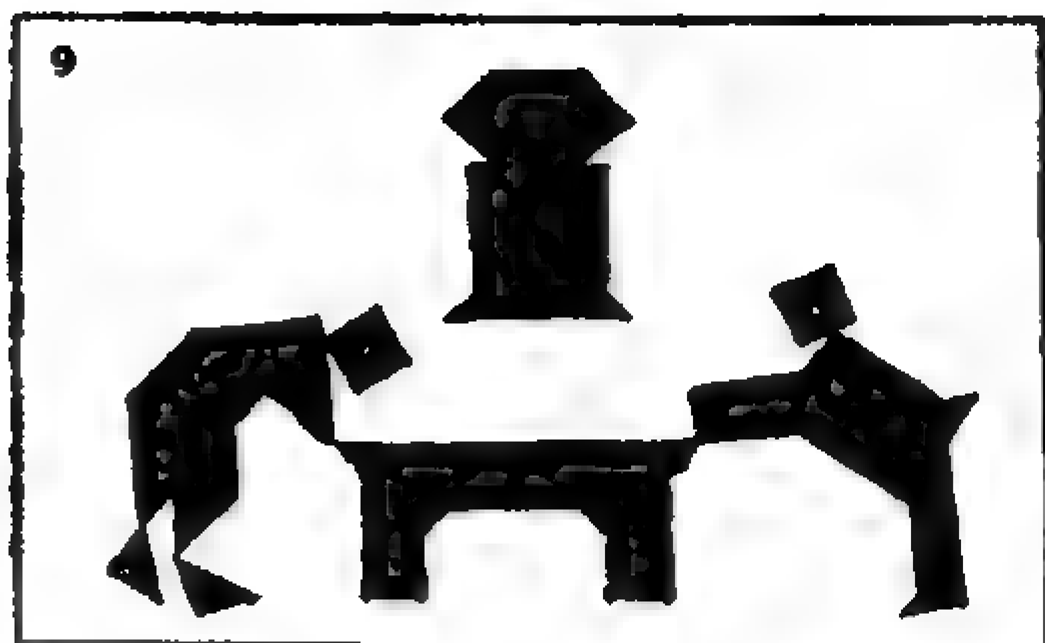
作比我原来能做到的要更多一些。”

好几位来信者告诉我，他们拥有或曾经拥有那些中国古书的善本。美国的一位先生在信中这样写道：“……我的珍藏品中有一本用绵纸订成的书，用黑墨印刷（标题页上有一条中文题词），书中包含了三百多个造型。它是一盒‘七巧板’的附件，这盒七巧板同样为我所有。盒中有七个拼块，用珍珠母制成，两面都擦得锃亮，并有精细的雕刻。它们被装在一个 $2\frac{1}{8}$ 英寸见方的红木盒子里。我那位了不起的叔叔……是第一批访问中国的传教士之一。这盒七巧板和这本书，以及一大批其他的纪念物，就是他送给我祖父的，后来就传到了我手里。”

我的这位来信者热心地向我提供了这套七巧板的拓印，从中可清楚地看到，它们的切割比例正是我前面所指出的。由于下述原因，我把那条中文题词复制在这儿（图 8）。这本书的主人告诉我说，他曾经把这条题词给许多在美国的中国人看，并答应以高达一美元的代价求得它的翻译。但是他们都坚决地拒绝念出这句话，并给出一个站不脚的借口——这题词是日文的。然而，土生土长的日本人坚持说这是中文。难道关于七巧板有什么超自然的神秘东西，使得撩起这层面纱就这么难？或许这页内容会来到某位熟悉中文的读者的眼皮底下，他将提供所需要的翻译。这或许能（或许不能）让这个奇特的问题变得清楚

8

一点[①]。



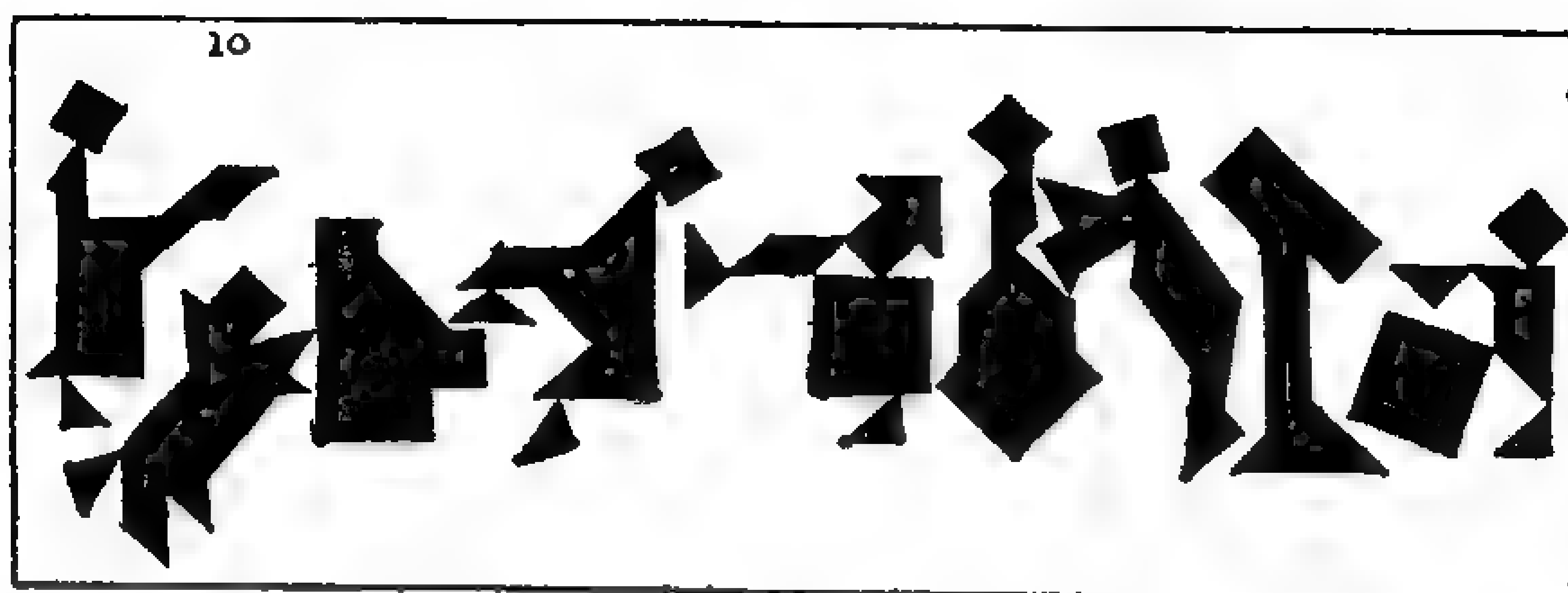
同时用几套七巧板，我们可以雄心勃勃地构造难度更高的拼图。一位朋友劝我不要把我的拼图“一场桌球比赛”（图9）提交给科学院。他肯定地对我说，它是不会被接受的，因为那些“评审者是如此的囿于习俗而偏执保守”。他或许是对的，但这幅拼图会受到后印象画派[②]和立体派[③]的更多赞赏。比赛者正弯腰扶着球桌考虑怎样击出一次非常美妙的好球。当然，这两个人，这张桌子，以及那个钟，是用四套七巧板构成的。我的第二个拼图名叫“管弦乐队”（图10），它是为一座大音乐厅做装饰而设计的。这里我们有指挥，有钢琴师，有胖胖的小号手；还

---

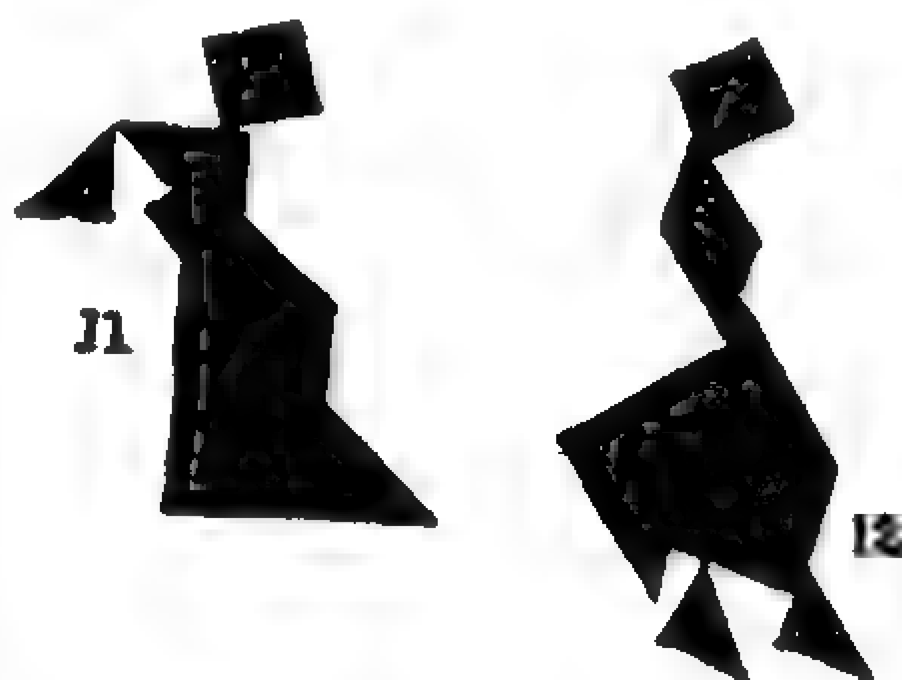
① 据译者所知，这条题词出自清嘉庆年间碧梧居士潘氏辑印的《七巧合璧图》，系一七巧板造型的注文。其中两人对坐，似在推杯换盏，大有“酒逢知己千杯少”之意。可见这条题词是：“两人对酌，此七巧之化境也。”其中“酌”、“之”两字，实难辨认；且这条题词出现在那本七巧盒说明书的标题页上，旁边可能没有这幅两人对酌图；加上这里的“之”字似日文片假名ウ或平假名う。难怪那些在美国的中国人不解，推说是日文。——译者注

② 19世纪后期形成于法国的一个画派。该画派强调主观感受的再创造，注重色彩对比关系、体积感及装饰性等。代表人物有塞尚（Paul Cézanne，1839—1906）等。——译者注

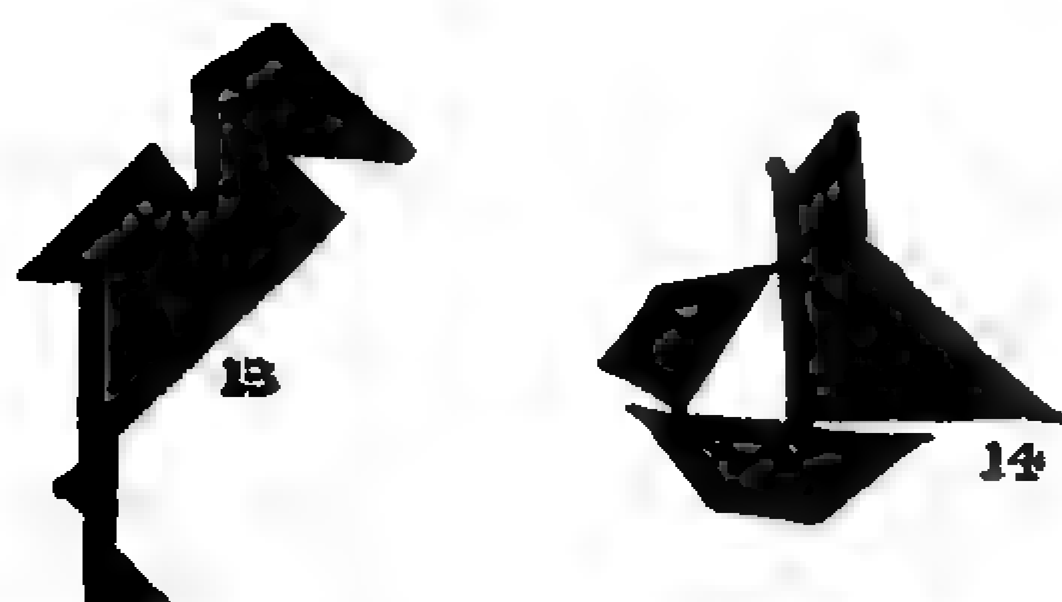
③ 20世纪初形成于法国的一个艺术流派。表现在绘画上，主要是在作品中分析、肢解自然形态，又强调探究多面积的物体结构。代表人物有毕加索（Pablo Picasso，1881—1973）等。——译者注



有左撇子的低音提琴手，他的姿态栩栩如生，但是他与他乐器的距离确实不太正常；还有那个鼓手男孩，以及他那庄严肃立的乐谱架。那只呆在钢琴背后的狗不吠不叫：它是一位有欣赏能力的听众。

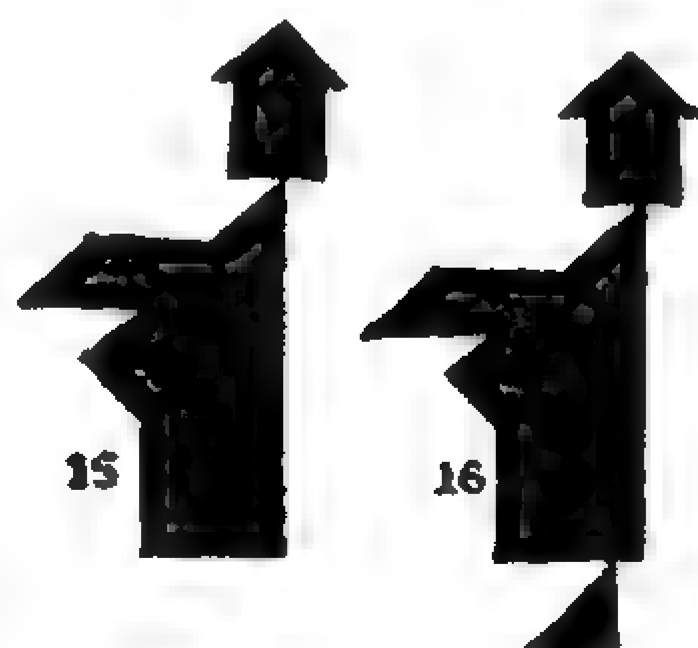


关于这些七巧板拼图，有一件值得注意的事：它们使人们想象出许多并不是真的在那儿的东西。例如，对着比琳达小姐（图 11）和那个荷兰姑娘（图 12）看上几分钟，谁不能马上感觉到其中一位的傲慢表情和另一位的淘气神态呢？接下来再看一下那只鹅（图 13），看看它怎样使你觉得那条腿比所用的任何一块七巧板都要细得多。这实际上是一种视错觉。还有，请注意在那艘帆船（图 14）的情况中，顶上留出的那个小角尖是怎样而使人们想象出一根完整的船桅来的。如果你在白纸上拼放七巧板，但不让它们相互紧密接触，在有些情况下，拼图效果会因白



色线条而得到加强;但在其他情况下,这种效果几乎全被消除。

最后,我从人们在玩七巧板时偶然会遇到的许多奇特的悖论中给出一个例子。我让你看两个尊者的造型(图 15 和图 16),他们看上去完全一样,只是一个没有脚一个有脚。好,这两个人形是用同一套七巧板构成的。第二个人的脚是从哪儿得来的呢?

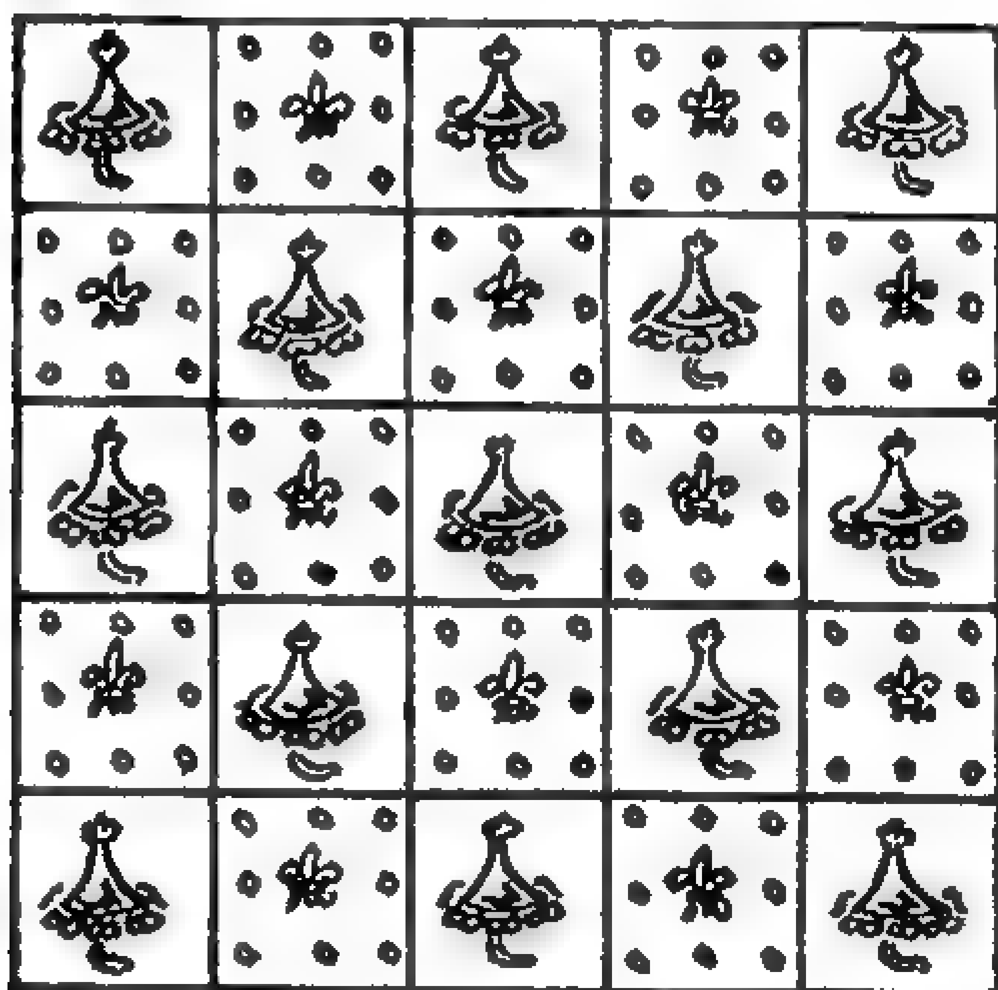


拼缝趣题

一个东拼西凑的国王①。

——威廉·莎士比亚:《哈姆莱特》,第2幕第4场

170 垫子套面



上图代表一块正方形的织锦。一位女士想把它裁成四块,使得其中两块能拼成一块标准的正方形垫子套面,而其余两块则拼成另一块正方形垫子套面。她该怎样裁呢?当然,她只能沿着那二十五个方格的分隔线裁剪,而且图案必须"匹配"得当,无论如何不能在这块料子的花纹上出现不规则的情况。只有一种方法可以达到这个目的。你能把它找出来吗?

① 原文为 Of shreds and patches。在莎士比亚的原作中,完整的句子为 A king of shreds and patches。朱生豪译本作"一个下流褴褛的国王",用于此处显然不能扣题。故权作此译。——译者注

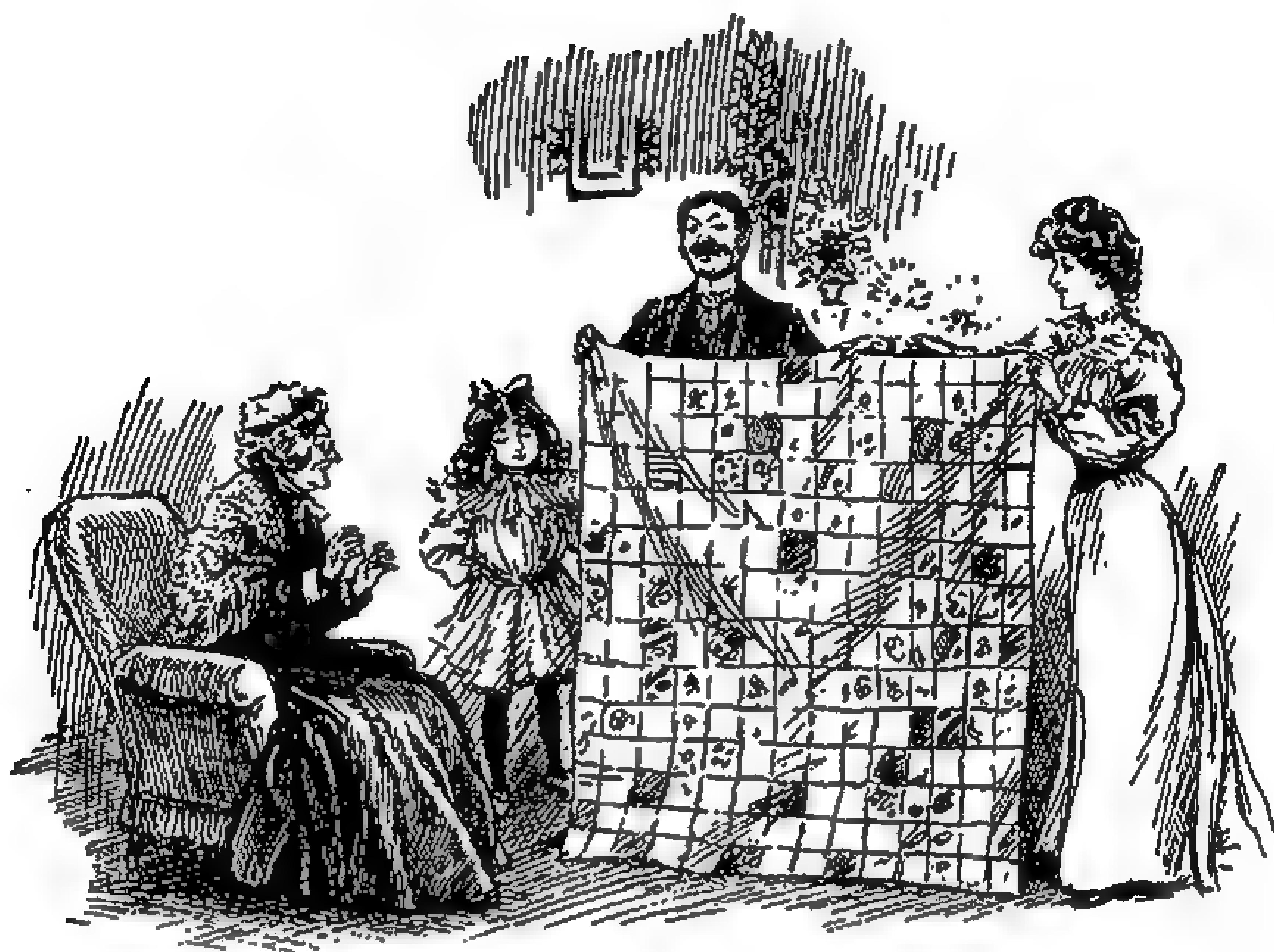
171 旗帜趣题



一位女士有一块正方形的旗布，上面有两头狮子。插图就是这块旗布按准确比例缩小的复制品。她想把这块料子裁成几块，以拼成两面正方形的旗帜，每面旗帜上一头狮子。她发现只要裁成四块就能做到这一点。她是怎样设法做到的呢？当然，裁到不列颠之狮将是一件不可饶恕的罪行，因此你必须小心，绝不能让裁剪线经过它们身上的任何一个部分。女士们被告知，无论如何都不能允许"翻转"，而且这块料子一点儿也不能浪费。如果找到正确的求解方法，这完全就是一道简单的剖分小趣题。记住拼出的旗帜必须是标准的正方形，但是它们的大小不必相同。

172 斯迈利太太收到的圣诞礼物

当斯迈利太太收到她六个孙女的圣诞礼物——她们亲手缝制的一条非常漂亮的拼缝被子的时候，她的脸上露出了出自内心的愉快表情。这条被子是由同样大小的丝绸面料小方格构成的。由于每边有十四个小方格，因此它显然是一条用不多不少 196 个小方格拼缝而成的大被子。现在已知这六个孙女每人奉献了一条正方形的小拼缝被子（这六个正方形大小各不相



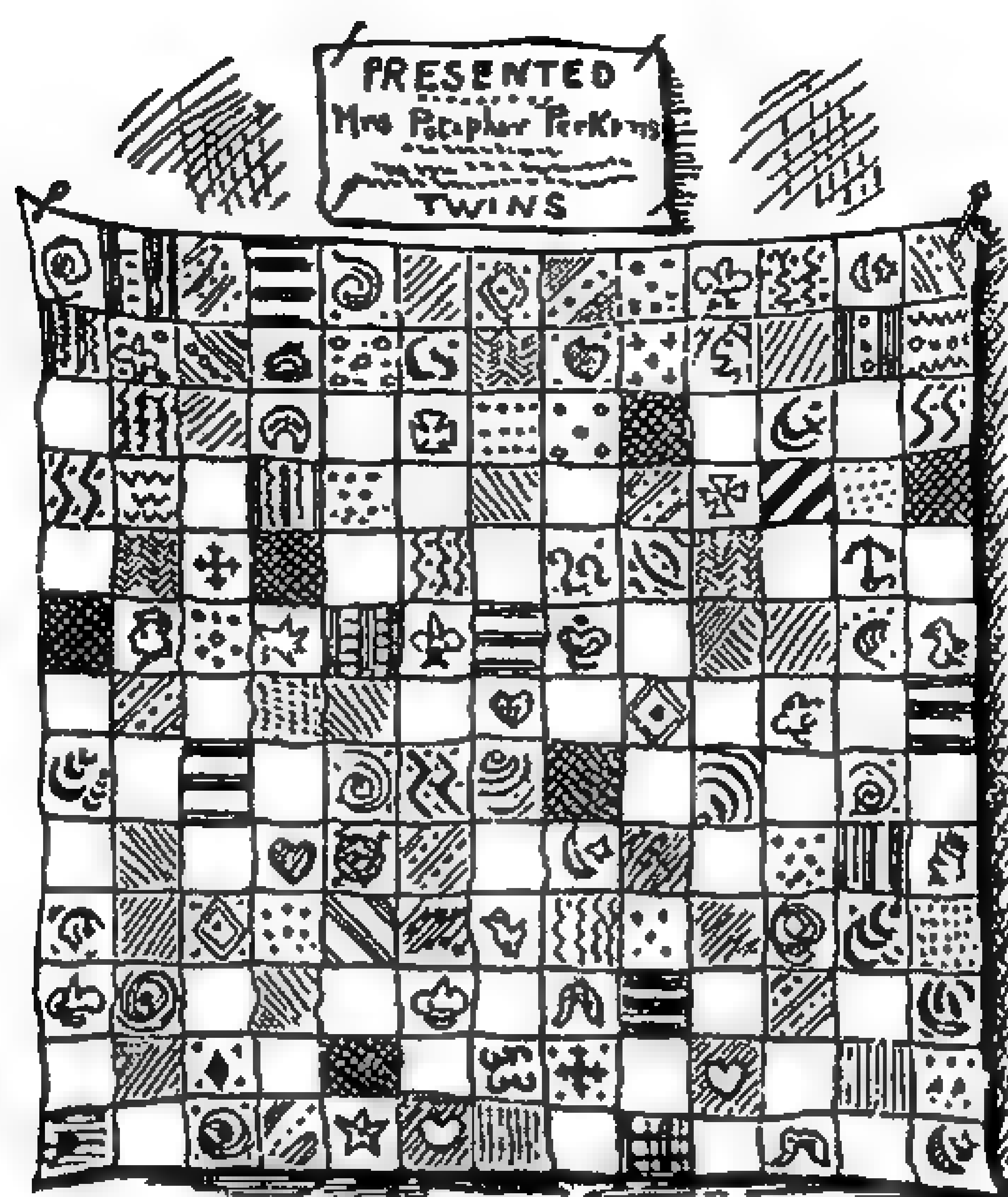
同)，作为这条大被子的一部分。但是要把这些小被子合起来拼成这条正方形大被子，必须把其中一位姑娘的小被子沿原来的拼缝针脚拆开，拆成三块。你能不能说明这条大被子可能是怎样拼缝出来的？当然，任何部分都不能翻转。

173 珀金斯太太的被子

可以看到，在这种情况中，这条正方形拼缝被子由 169 个小方格组成。这道趣题是要你求出能拼成这条被子的正方形的最小个数，并说明它们可能是怎样拼起来的。或者反过来说，只能用拆针脚的方法，把这条被子分成尽可能少的正方形[1]。

---

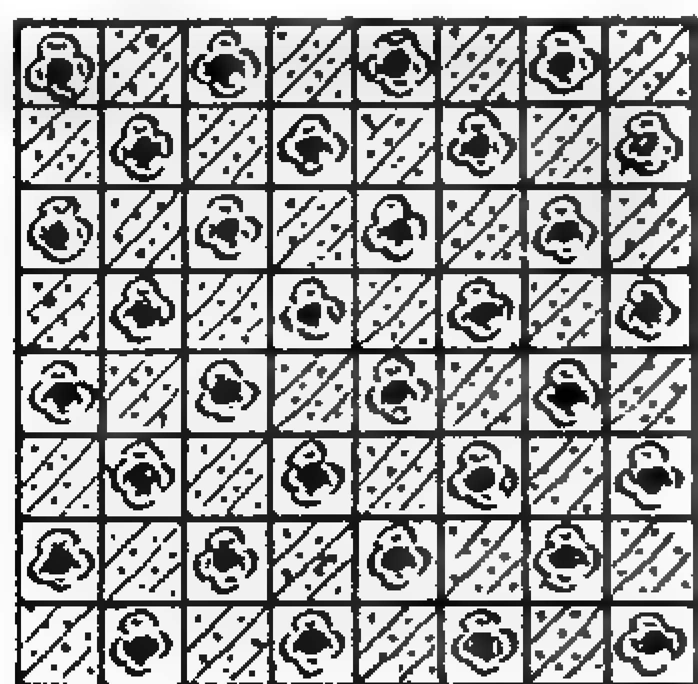
[1] 注意本题没有要求这些正方形大小各不相同。——译者注

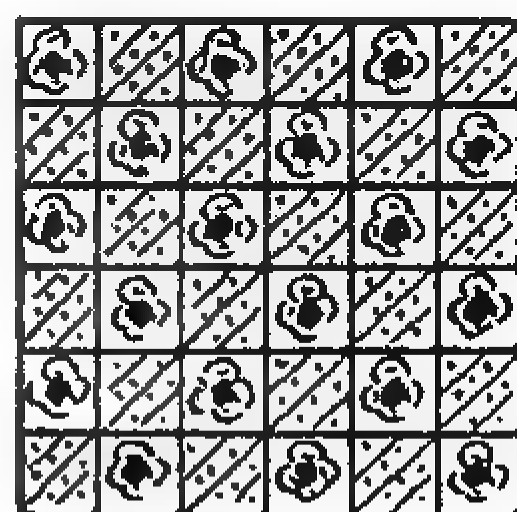


174 两块织锦

我有一次去一位女士家拜访，在桌子上发现有两块美丽的正方形织锦。它们是东方工艺品的优秀典范——采用了同样的构思，一种雅致的方格图案。

“难道它们不让你赏心悦目吗?”我的朋友说道，“是我的一个侄子送我的，他刚从印度回来。现在，我要你帮我一个小忙。

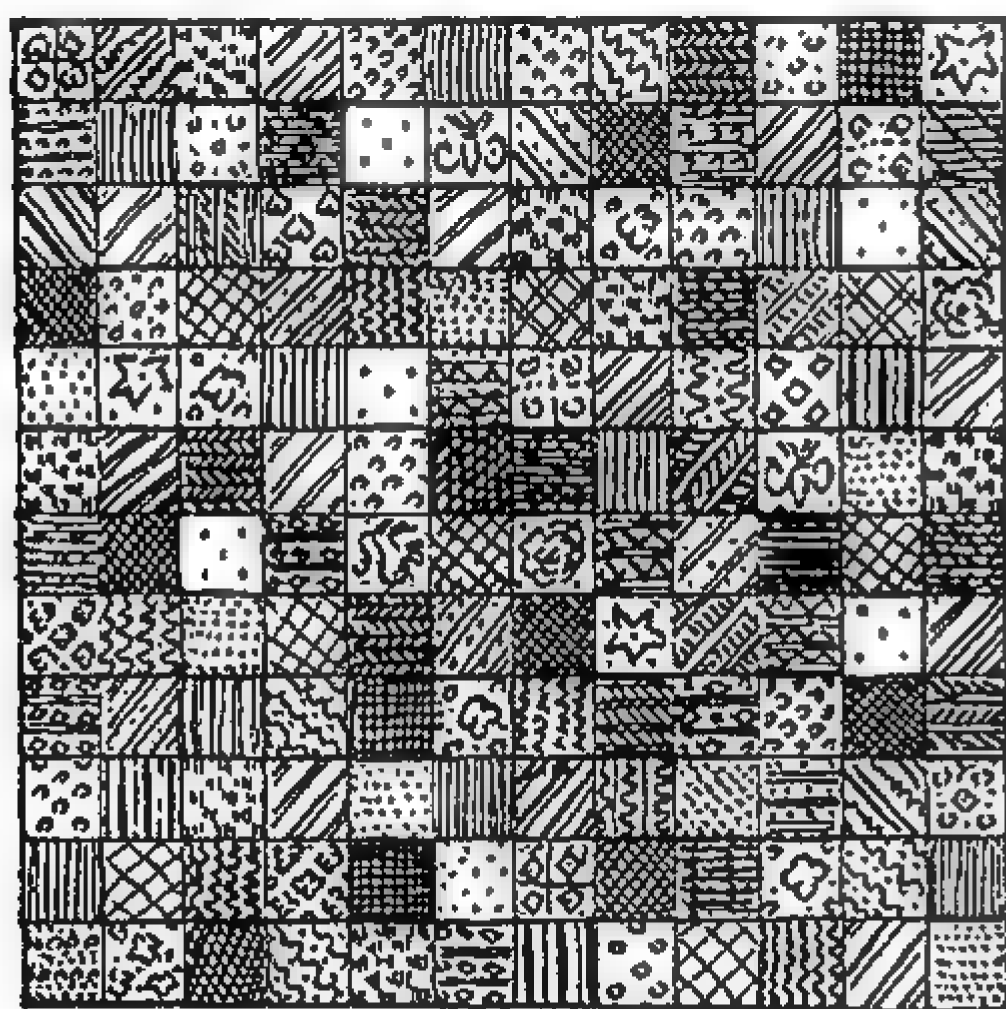


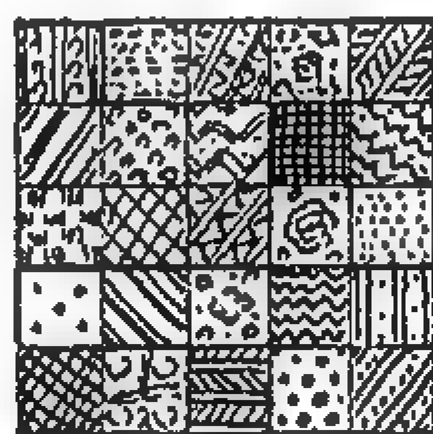


你看，我决定把它们合起来，做成一块大的垫子套面。我怎样才能做到这一点，并使得这些料子所受到的破坏尽量小？当然，我建议裁剪只能沿着那些小方格的分隔线进行。”

我以她所期望的方式把这两个正方形裁成四块，然后把它们拼成了另一个大正方形，并注意着让图案匹配得当。当我完成这件事的时候，发现其中两块的面积正好相等；也就是说这两块所含格子的数目相同。你能不能说明符合这些条件的裁剪该怎样进行？

175 又一道拼缝趣题

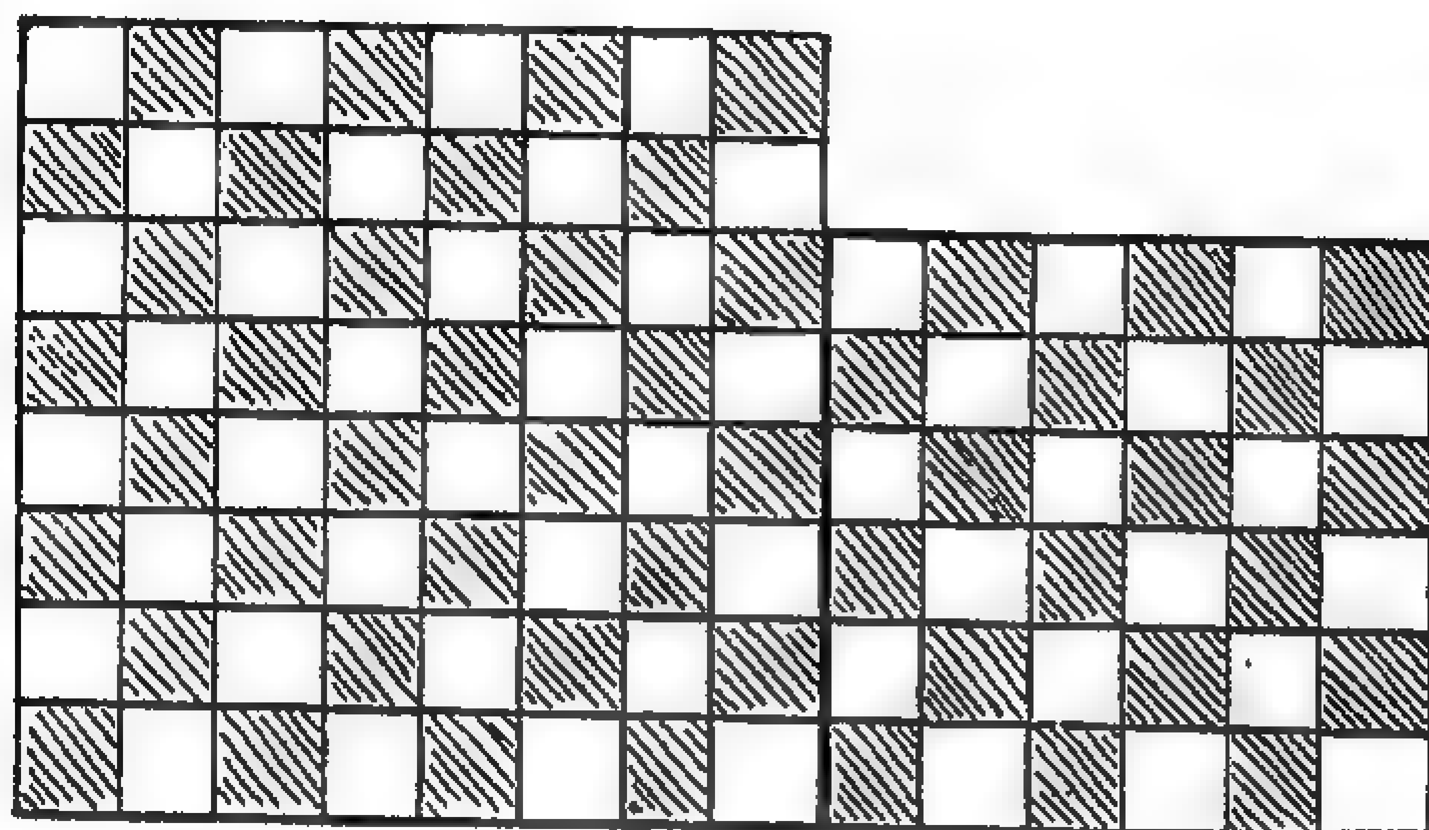




一位女士收下了她两位女性朋友送来的礼物，那是两块漂亮的拼缝丝绸，如我们的插图所示。可以看到，这两块丝绸都是用同样大小的小方格拼成的——一块是 12×12，另一块是 5×5。她提议把它们合起来做成一块 13×13 的正方形拼缝被面，不过，她当然不会把丝绸剪开——只是在必要的地方拆开针脚，然后再拼缝起来。令她感到头晕的是：一位朋友肯定地对她

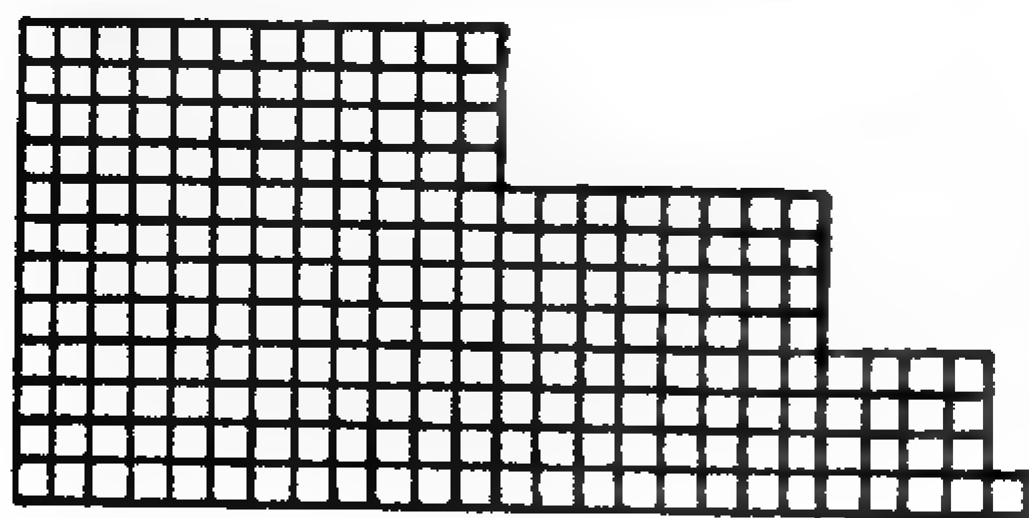
说，为拼出这块新被面而需要裁成的小块总共不会超过四个。你能不能让她看看这道针线活小趣题是怎样通过裁成这么少的小块而解决的？

176 剪油毡



这幅图表示两块油毡。它们正面有同样的方格图案，但反面都没有，因此这两块东西是不能翻转的。这道趣题是要把这两个正方形剪成四块，然后把它们拼成一块 10×10 的标准正方形，不但图案要匹配得当，而且那块大油毡上被剪去的部分要尽量小。

177 又一道油毡趣题



你能不能把这块油毡一剪为四，然后拼成一个标准的正方形？当然，只可以沿着那些方格的分隔线剪。

五花八门的几何趣题

人们的口味是如此多样。

——艾肯赛德[1]

178 纸板盒

这道趣题并不难，但你会发现，那个简单的求解方法倒是令人趣味盎然。我有一只长方体纸板盒，其顶面面积为120平方英寸，侧面面积为96平方英寸，端面面积为80平方英寸。这只盒子的尺寸是多少？

179 钟楼窃贼

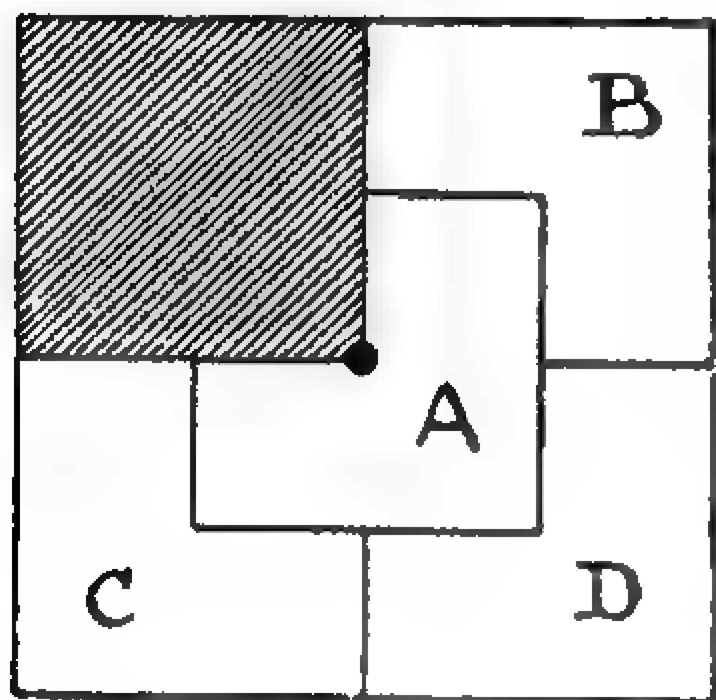
一天夜晚，一座教堂的钟楼被两个人破门而入，他们是来偷钟绳的。那两根钟绳从木制天花板上的孔里穿出，高高地悬挂在那儿。这两人一秒钟也不耽搁地爬到绳子顶端，其中一人抽出小刀，在他头顶上方一刀把绳子割断。这样做的结果是，他掉到了地板上，伤得不轻。他的同伙大声叫道，"你这个傻瓜，真是活该！瞧好了，你应该像我这样。"说着他就在他抓绳子地方的下方把绳子割断了。于是他惊愕地发现，对他来说情况也不妙。他吊在那儿，一直吊到筋疲力尽，结果不得不松手，掉在他同伙的身旁。第二天早晨，人们发现他们躺在那儿，腿也断了，胳膊也折了。他们是从多高掉下来的？在那两根绳子没

---

① 马克·艾肯赛德(Mark Akenside, 1721—1770)，英国诗人，医师。主要作品有《想象的乐趣》(*Pleasures of the Imagination*)，这句格言即引自此诗。——译者注

有被割断的时候，有一根绳子垂下来正好触到地板。如果你把这绳子拖到墙壁那儿，并将它拉直，那么绳子末端与墙壁的接触点正好高于地板三英寸；而当绳子静静地垂在那儿的时候，墙壁离绳子有四英尺。这根绳子从地板到天花板有多长？

180 四个儿子



读者们会认出这张图是他们青少年时代就熟悉的一位老朋友。有一个人，拥有一块正方形的地产。他死后，他的遗孀按他留下的遗嘱得到这块地产的四分之一，即图中用阴影线表示的那块。余下的地产由他的四个儿子平分，他们每人将得到一块面积和形状都相同的地产。我们看到这件事已经办妥。但是这故事的后续部分就不那么广为人知了。这块地产的中心有一口井，已在图中用黑点标出。于是本杰明、查尔斯和戴维不乐意了，他们说这样划分"不公平"，因为阿尔弗雷德可以直接使用这口井，而他们要到井那儿去就得擅自闯入他人的土地。这道趣题是要你说明，怎样按规定划分这块地产，使得每个儿子分到的土地具有同样的形状和面积，而且他们各人都不必离开自己的土地就能使用这口井。

181 三个火车站

我坐在一节客车车厢里，注意到隔间的那一头有一位令人敬重的乡绅，此人我有点面熟。他正在与另一位旅客交谈，

后者显然是他的朋友。

“从火车站开车到你家有多远?”那位我不认识的人问道。

“嗯,”这乡绅答道,“如果我在阿普尔福德下车,那么这距离就同我再坐十五英里到布里奇菲尔德下车一样;而如果我在阿普尔福德转车,再坐十三英里到卡特顿下车,结果也是这个距离。你瞧,我家与三个车站等距,因此我坐火车有好多选择。”

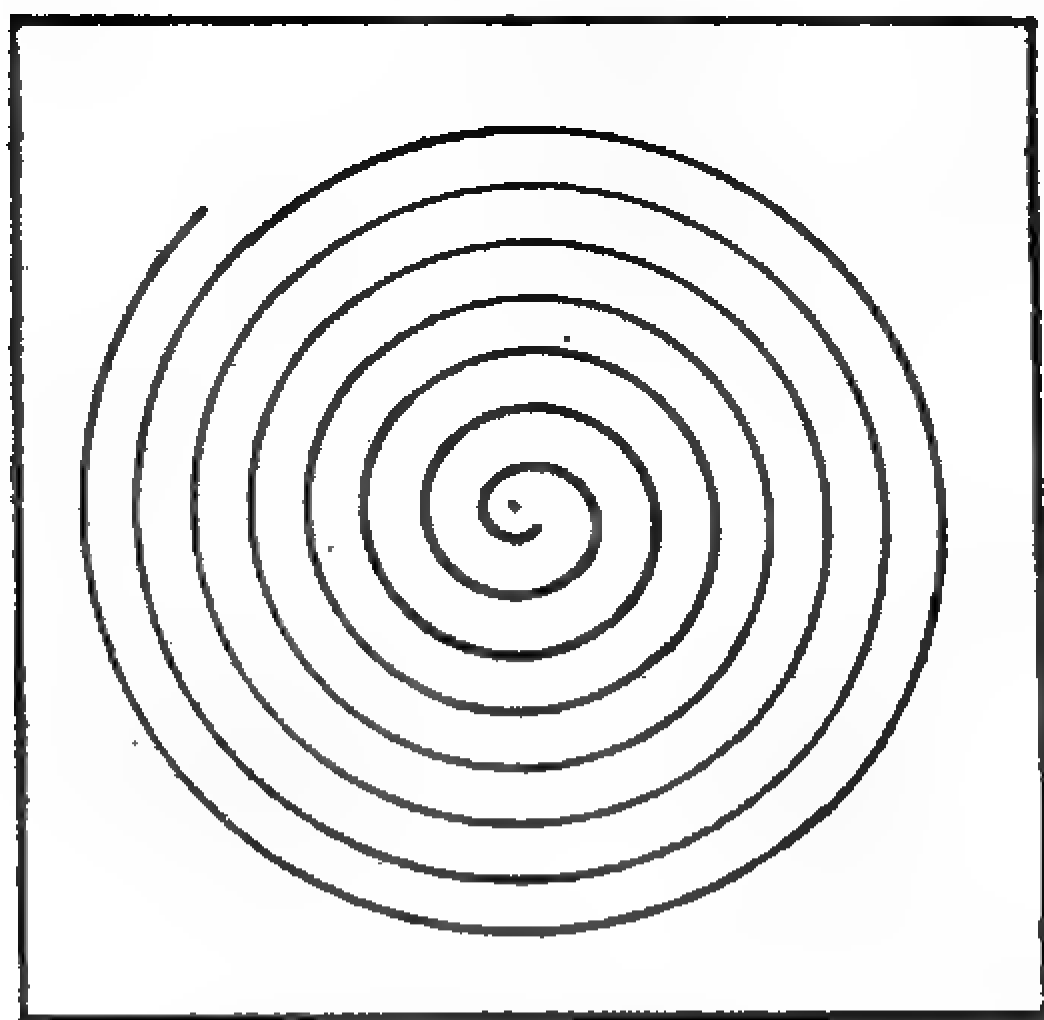
现在我碰巧知道布里奇菲尔德离卡特顿正好是十四英里,因此我自娱自乐地算出了这位乡绅从其中任何一个车站下车后开车回家的准确距离。这距离是多少呢?

182 花园趣题

拉克布兰教授对我说,他最近在乡下一位老朋友的花园里,与这位朋友在一棵大树下边抽烟边促膝交谈。这座花园用四道平直的墙围着。教授的朋友说,他曾测量过这些墙,发现它们分别长 80 码、45 码、100 码和 65 码。“那么,”教授说,“我们可以算出这花园的准确面积。”“这不可能,”主人说,“因为根据这四个边长,你会得到无穷多个不同的形状。”“但是你忘了,”拉克布兰的眼睛里闪烁着光芒,他说,“你有一次告诉我,你把这棵树种在与这花园四个顶点等距的地方。”你能算出这花园的面积吗?

183 画螺线

如果你平托着下页所画的那张纸,使它飞快地旋转一下,同时眼睛盯着这条螺线的中心,那么当纸停下时你会觉得这螺线仍在旋转。或许有许多读者都熟悉这个小小的视幻觉游戏。不过这道趣题要展示的是,我居然能十分精确地画出这条



螺线，而且除了一把圆规和一张画这幅图的纸以外什么都不用。你在这种情况下会怎样来做成这件事呢？

184 画椭圆

你能不能在一张纸上用圆规画一下就画出一个椭圆来？当你知道了怎样画的时候，你会发现这是世界上一件最简单的事情。

185 圣乔治[1]之旗

在圣乔治节这个英格兰国庆日[2]的一次庆典上，我看着我们英格兰这位主保圣人的旗帜，不觉浮想联翩。我们很熟悉这面旗帜，都知道那是白色底子衬托着一个红色的十字架，如插

---

① 圣乔治(Saint George，?—303?)，英格兰主保圣人，基督教殉教者，生平不详，传说曾杀蛟龙救一少女。——译者注

② 在每年的4月23日。——译者注



图所示。这就是圣乔治之旗。使徒安得烈[①]之旗(苏格兰)是蓝色底子衬托着一个白色的“使徒安得烈十字架”[②],而圣巴特里克[③]之旗(爱尔兰)则是白色底子衬托着一个同样的十字架。这三者合起来就形成了我们联合王国的国旗。

当时我看着圣乔治之旗,忽然想到下面这个问题可以作为一道简单而美妙的小趣题。假定这面旗帜长四英尺宽三英尺,如果要求所用的红色旗布和白色旗布具有同样的面积,那么十字架的臂该有多宽?

186 布带趣题

一个男孩把一条布带从一根立竿的顶端系到另一根立竿的底端,又从后者的顶端系到前者的底端。然后他对他的爸

---

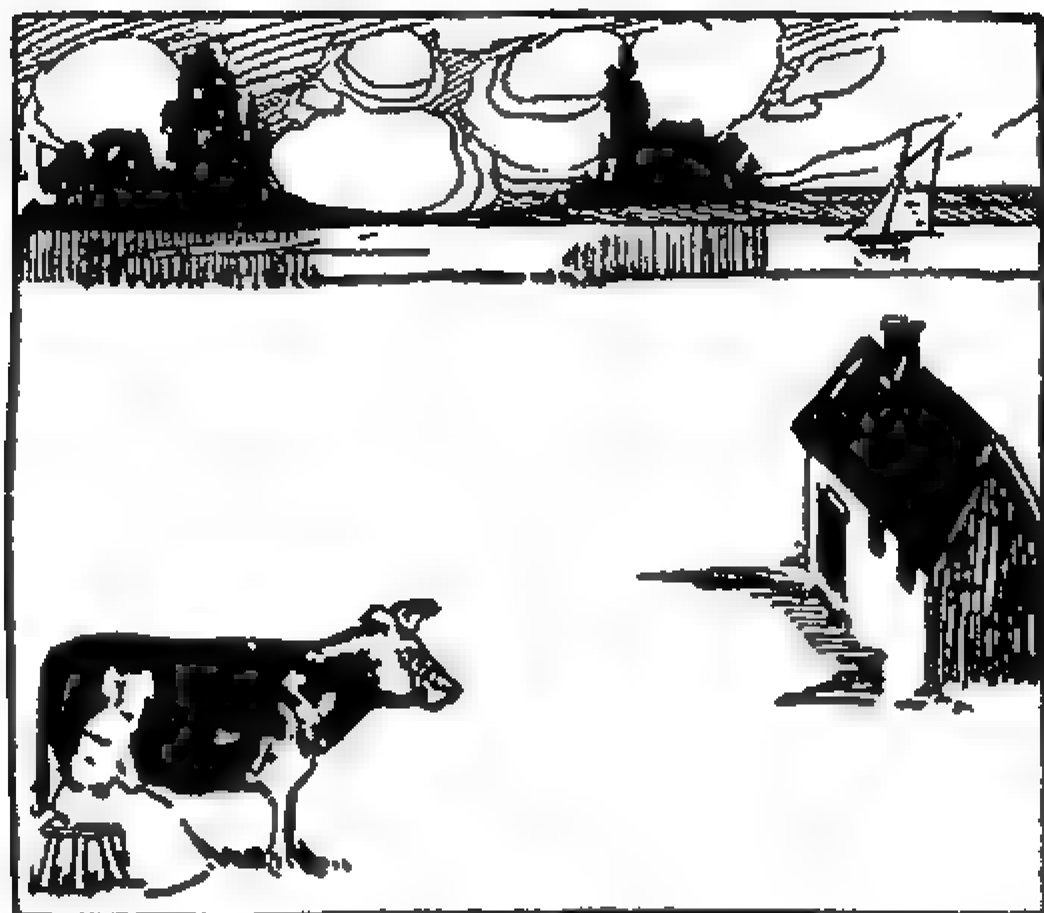
① 使徒安得烈(Saint Andrew,传说卒于公元60—70),耶稣的十二门徒之一,苏格兰主保圣人。——译者注

② 一种X形的十字架,据说使徒安得烈被钉死在这种十字架上。——译者注

③ 圣巴特里克(Saint Patrick,389? —461),在爱尔兰建立基督教会的传教士,爱尔兰主保圣人。——译者注

爸提出了如下问题:已知一根立竿高七英尺,另一根立竿高五英尺,那么那两根斜绷着的布带的交点离地面有多高?

187 挤奶女工的趣题



这里是一道关于牧场的小趣题。乍看上去,读者可能会自然而然地以为这道题非常深刻,将涉及一些深奥的计算。他甚至会说这绝对不可能有答案,除非告诉我们关于距离的某些确定性条件。然而,这道题确实非常"幼稚单纯"。

在一个牧场的一角,我们看到一位挤奶女工正在给一头奶牛挤奶。牧场的另一侧是乳品间,挤出的牛奶必须放到那里去加工。但人们注意到,这位青年妇女总是拎着提桶先到河那儿去一下再回身去乳品间。说到这儿,顿生疑心的读者或许会问为什么她要到河那儿去。我只能回答这不关我们的事。这些所谓的牛奶完全是在当地供应的。

"您去哪儿,我可爱的姑娘?"

"去河那边,先生。"她说。

"我不会选用你的乳品了,我可爱的姑娘。"

“没人用斧子逼你，先生。”她说。

如果你想对这件事刨根问底的话，那么这样一种我行我素的精神完全可以让你无法招架。所以我们还是放过这个关于商业道德的问题，转到这道趣题的内容上来。

请你从那个挤奶凳出发，向河边作一条直线，然后再回到乳品间的门口，为这位挤奶女工指明一条最短的路径。就是这些。其实很简单，在河岸上确定一个点，如果她想走一条最短的路，那么就应该向着这个点走去。你能不能求出这个点？

188 石球问题



那一天，一位石匠按照客户的要求，凿成了一个准备用作某种建筑装饰的石头大圆球，这时来了一位聪明伶俐的小男生。

“往这里瞧，”石匠说，“看来你是个机灵的小伙子，你能不能告诉我这样一个问题的答案？如果我把这石球放在平地上，那么我能把多少个同样大小的其他石球围着它放一圈（也放在这平地上），而且每个石球都要同它接触？”

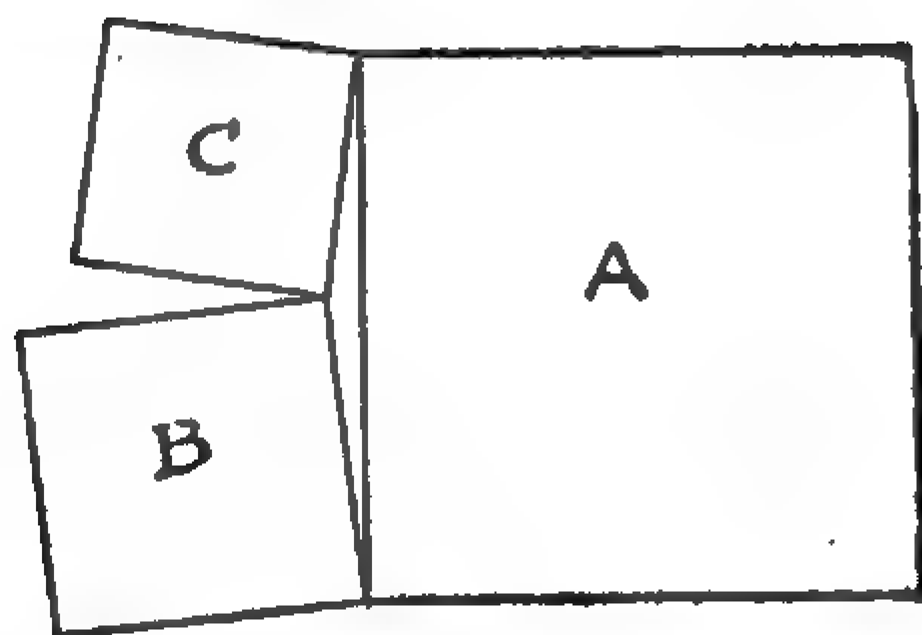
这孩子马上就说出了正确的答案，然后他向石匠提出了下

面这个小问题:

“如果这石球表面积的平方英尺数与它体积的立方英尺数相等,那么它直径的长度是多少?”

这位石匠答不上来。你能不能既答对石匠的问题又答对这男孩的问题?

189 约克郡的地产

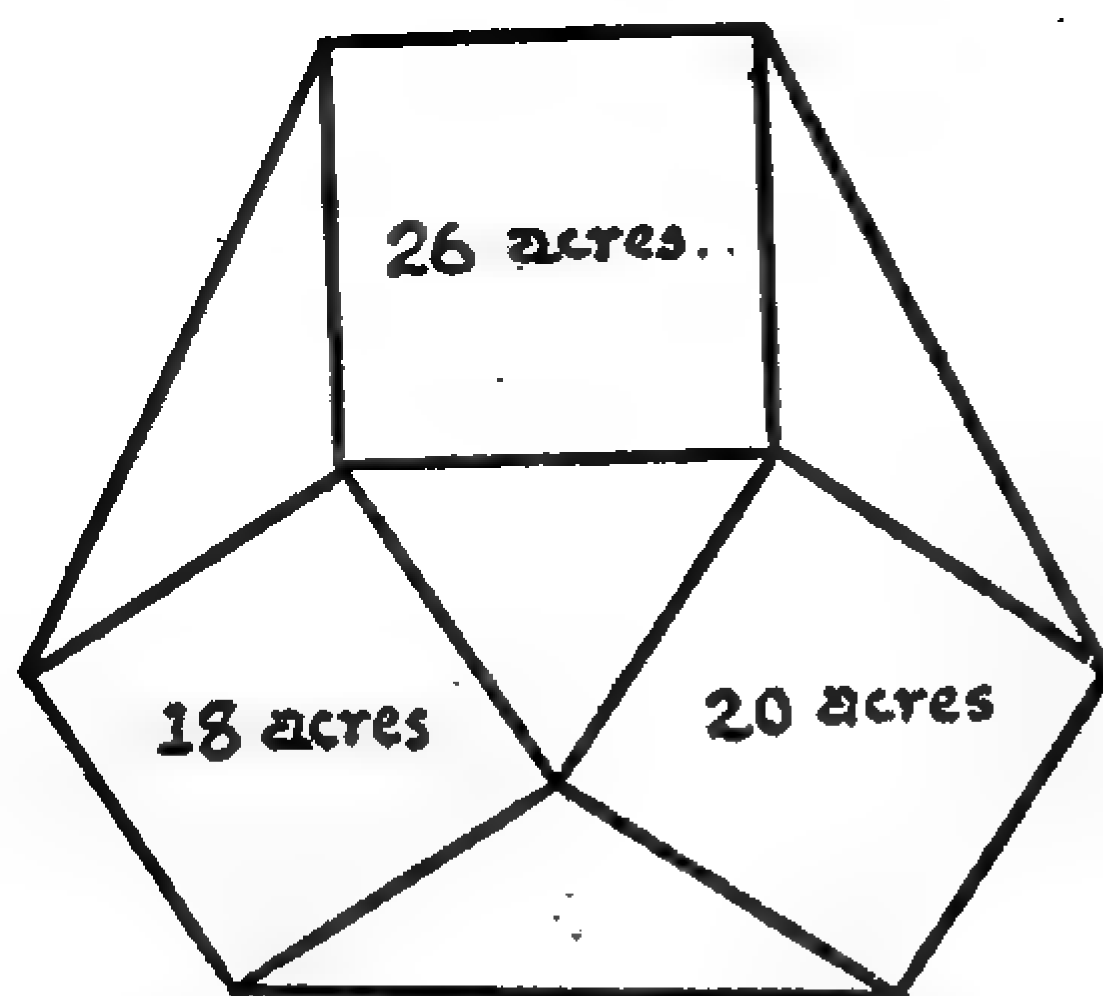


我访问了约克郡的一个大镇。离镇那天我去火车站,路上有一个人塞给我一张传单。我带着它进了车厢,没事的时候,就看了起来。那上面告诉我,约克郡有三块相邻的地产准备出让。每块地产的形状都是正方形,而且它们在顶角处相互连接,正如这幅草图所示。地产 A 的面积是 370 英亩,B 的面积是 116 英亩,而 C 的面积是 74 英亩。

不过,被这三块正方形地产所包围的那一小块三角形地产并不准备出让。说不出是什么原因,我很想知道这块地产的面积。它的面积是多少呢?

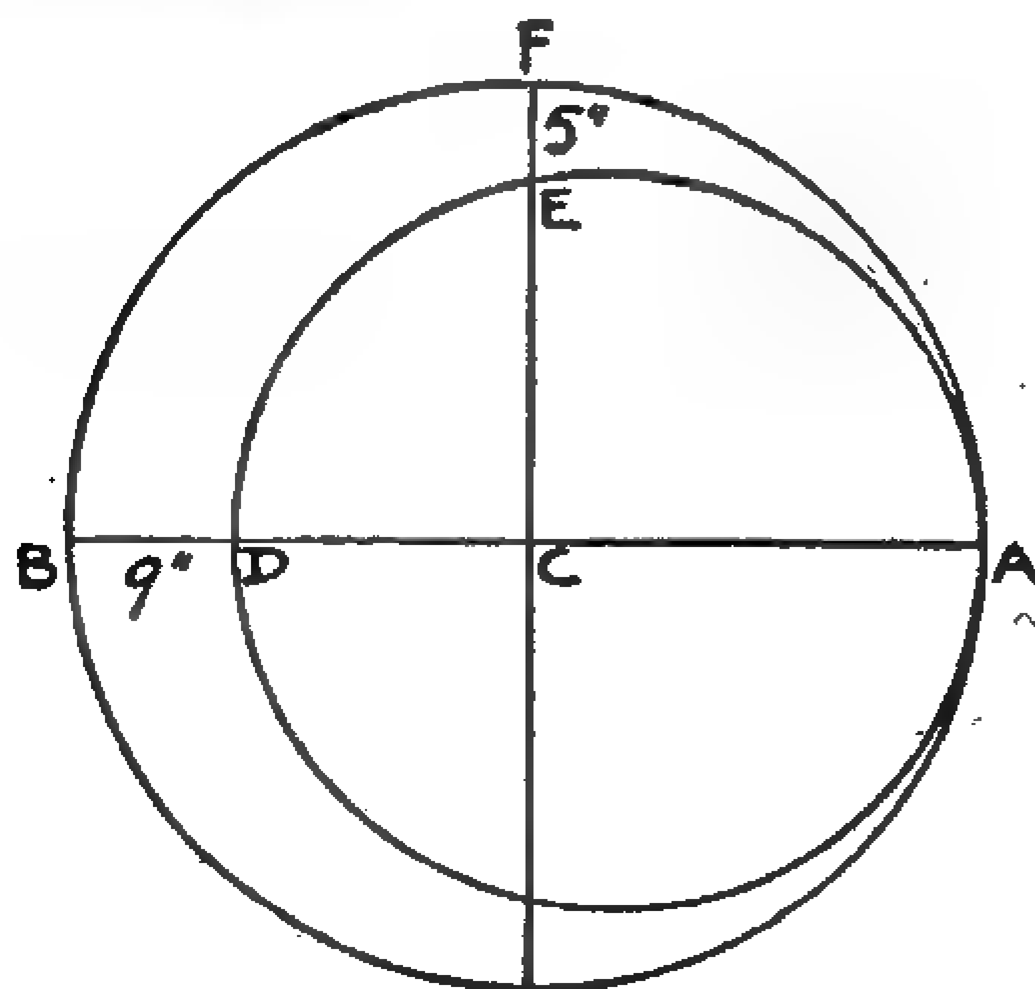
190 农场主沃泽尔的地产

我现在再介绍一个土地问题。我想你会发现,我在答案中提供的证明方法既有趣又容易理解。



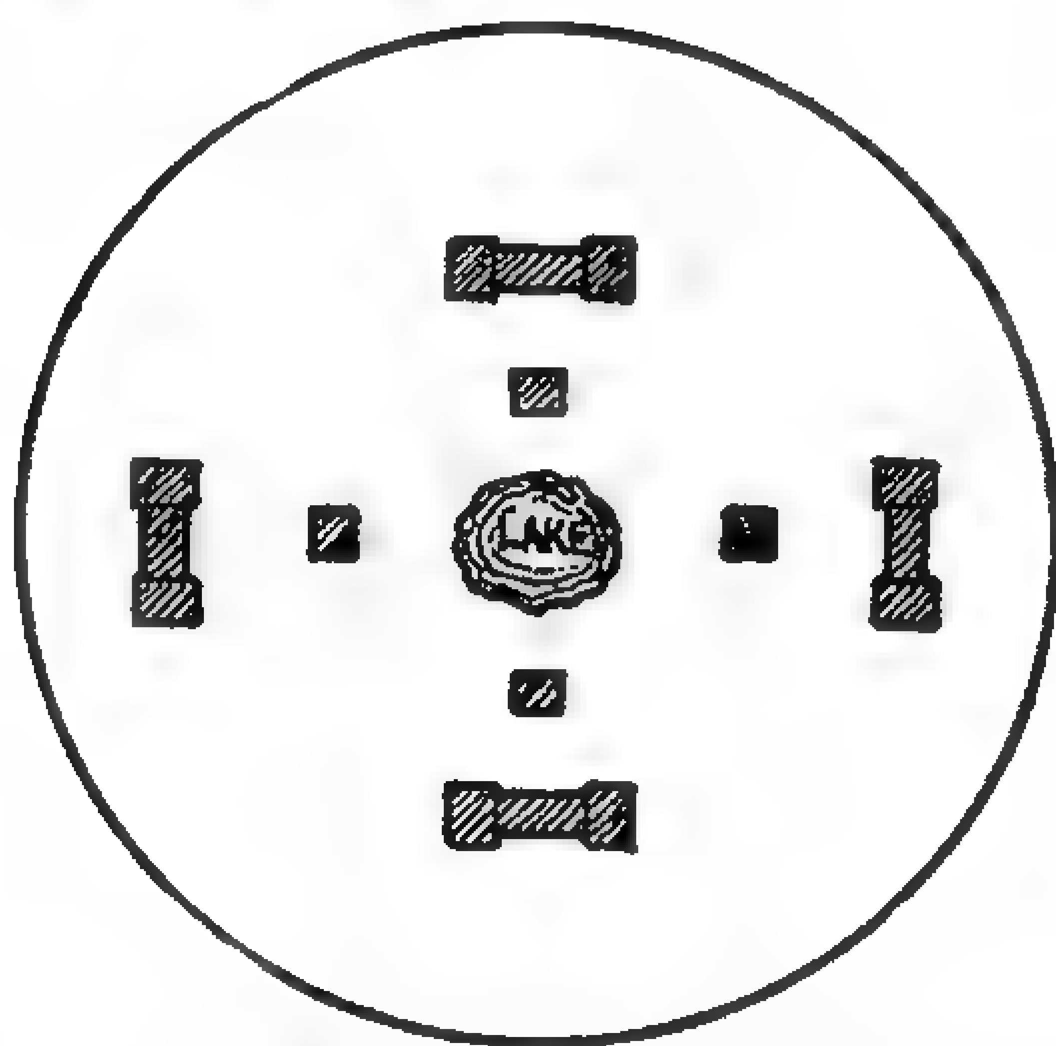
农场主沃泽尔拥有三块正方形的土地，如所附平面图所示。它们的面积分别是 18 英亩、20 英亩和 26 英亩。为了在他这份地产周围建起一个大围栅，他买下了这四块介于其间的土地。这道趣题是要你求出：这样一来，他的地产总面积是多少？

191 新月形趣题



这里是一道容易的几何趣题。上页那个新月形是用两个圆周形成的，而C是那个大圆的圆心。这新月形在B、D之间的宽度是9英寸，在E、F之间的宽度是5英寸。这两个圆的直径是多少呢？

192 颇费心机的墙



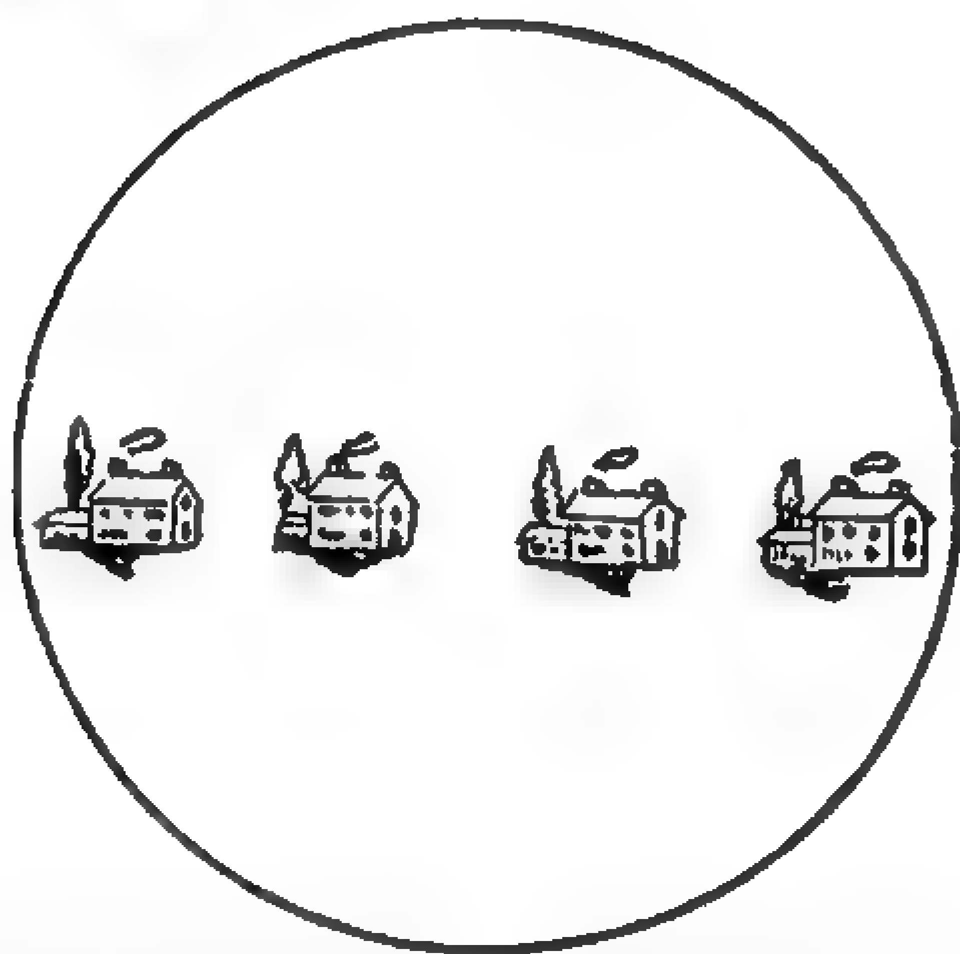
这里有一个小小的湖，四个穷人在它周围建起了自己的农舍，后来又有四个富人在此建起了他们的豪宅，如插图所示。富人们想把这个湖专归他们享用，于是指示一名建筑商竖起一道墙，这道墙要尽可能短，并把那些农舍隔在外面，却给他们留下通向湖边的自由通道。这道墙该沿怎样的线路建呢？

193 羊　圈

真是奇怪，过去五十年甚至一百年出版的每一本关于炉边游戏的小册子中，对一些著名趣题的答案，往往不是十分的

不尽人意，就是明显的差三错四。然而，似乎从未有人能觉察到它们的谬误。这儿就是一个例子。一位农场主有一个用五十个栏架围成的羊圈，其中只能容纳一百只羊。假定他想把这个羊圈扩展得足够大，使得能容纳两倍于前的羊，那么他还需要多少个栏架？

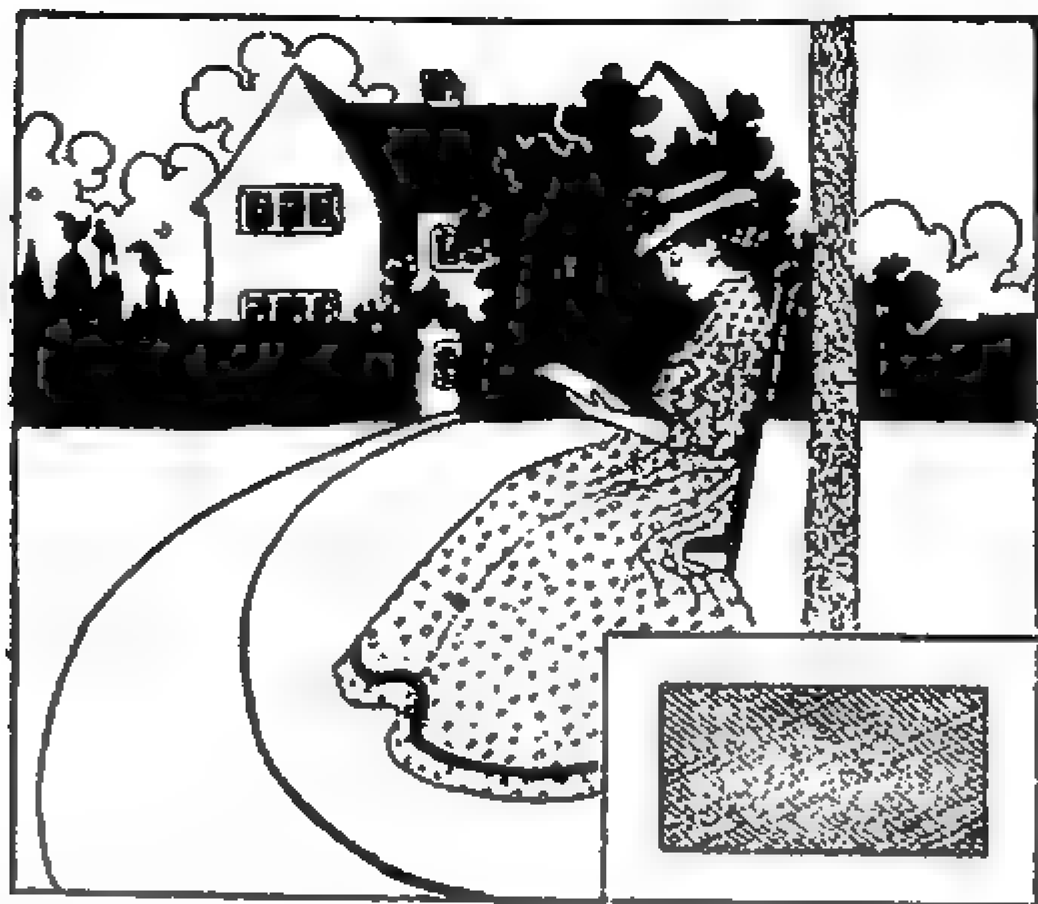
194 花园的围墙



一位好投机的乡村建筑商有一块圆形的场地，他在那上面建了四幢别墅，如插图所示。这块场地由一道砖墙围着，而这位房东答应再竖起三道砖墙，使得每户人家都不会被左邻右舍一览无余。不过这四个租户都坚持说不能有偏袒，每户都要拥有长度相等的墙面，让他们种植篱壁果树。这道趣题是要你说明，这三道墙可以沿怎样的线路建造，以使得每个租户都具有同样面积的土地和同样长度的围墙。

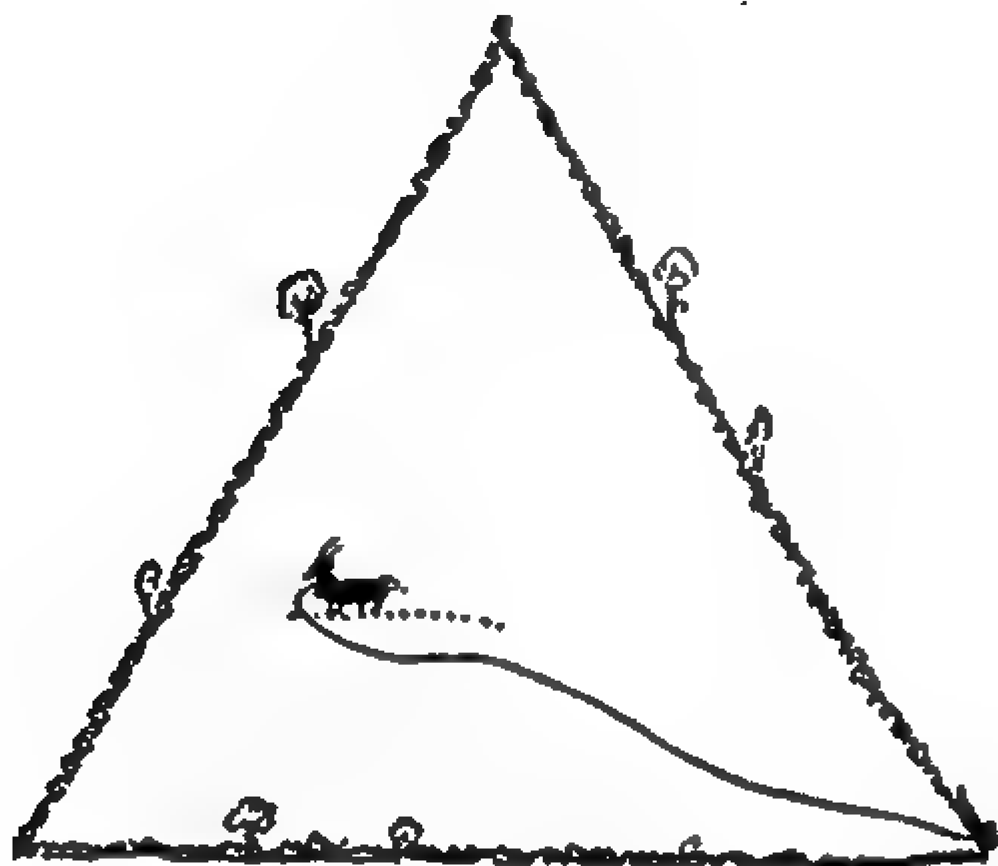
当然，每个租户的花园必须被其围墙完全围住，而且必须能证明，每家的花园拥有长度相等的围墙。这道趣题如果解决得当，连图都不要画。

195 贝琳达小姐的花园



贝琳达小姐是一位工作热情的园艺师。这幅插图描写她正在绞尽脑汁思考着一个可爱的小问题，这问题我这就叙述。她有一个长方形的花园，由一道高高的冬青树篱围着。她准备把它改为一个玫瑰园，种上一些她精心挑选的玫瑰花。她想把这花园的一半面积作为一个大花坛来种这些花，而另一半面积则作为围绕着这个花坛的一条处处等宽的道路。这样的一个花园如插图右下角那张草图所示。她怎样对这个花园进行划线标示，以满足这些简单的条件？她只有一把卷尺可用来做这件事，其长度等于这花园的长。而且，由于那冬青树篱又高又密，她所有的测量工作必须在花园里面进行。贝琳达小姐不知道花园的准确尺寸，而且她也没有必要知道，因此我也就不给出任何尺寸了。不管这花园的尺寸或比例是什么，这是一件非常简单的工作。然而会有多少位女园艺师知道该怎么做呢？那把卷尺可以是完全空白的——也就是说，它没有必要是一种刻度量具。

196 被拴住的山羊



这里是一道人人都应知道怎样解的小题目。有人把这只山羊放在一块大小为半英亩的草地上，这块草地的形状是一个等边三角形。羊被拴在位于这牧场一角的一根柱子上。要让它能吃到这牧场一半面积的草，这根拴绳应该有多长（舍入到最接近的整数英寸）？假定这山羊能够吃到拴绳尽头的草。

197 圆规趣题

真是奇怪，有时候，增加一个条件或一个限制，会把一道简单得近乎荒唐的趣题变为一道令人兴趣盎然但可能十分困难的题目。记得许多年前，我在街上买了一个机械的智力小玩具，当时这种玩具卖得正火。那是一块金属牌子，上面有一些洞，要求你设法把一个带有缺口的环从一个洞移到另一个洞，最终脱离金属牌子。我沿街走着，很快就明白了其中的诀窍，我可以把这个智力玩具放在口袋里，用一只手就把那个环取下来。我把这个小小的功夫表演给一位朋友看，他试图自己来做到这一点。数天后我遇到他，他向我显示了他在这种技巧上的娴熟

性。但是他有点儿吃惊,因为我从他手中取过那玩具,只用一只手的食指和拇指夹住金属牌子,经过一连串小小的摇晃和摆动,那个环我连碰也没碰,就掉在地上了。下面这道小难题对于许多读者来说很可能是一根相当难啃的骨头,原因就在于那个限制条件。

请说明怎样只用一把圆规就定出任何一条线段的中点。不允许用直尺、笔或其他器具——只能用圆规;不允许耍滑头玩花招,比方说把纸折一下。你只能按通常所规定的方法使用圆规。

198 八根棍子

我有八根棍子,其中四根的长度正好是另外四根的一半。我把每一根棍子都平放在桌子上,使它们围成了三个正方形,而且大小一样。我是怎么做到这一点的?必须做得干净利落,不能留什么尾巴。

199 爸爸的趣题

这里是一道由帕普斯[1]提出的趣题。帕普斯大约于公元3世纪末生活在亚历山大城。这道题是他的《数学汇编》(*Mathematical Collections*)第八卷中的第五个命题。我现在这道题所采用的形式,与我数年前以“爸爸的趣题”为题提出它时一样,就是要看看有多少读者能发现它是由帕普斯本人提出的[2]。

---

① 帕普斯(Pappus of Alexandria,约300—约350),古希腊数学家和天文学家。——译者注

② “爸爸”在英语中是papa,在希腊语中是παππας(pappas),与Pappus(帕普斯)相近。另,帕普斯的《数学汇编》主要是搜集了前人的成果,但这道题则是他本人的创作。——译者注



“这位小姑娘的爸爸拿了两块大小不同的矩形纸板，并把其中的一块剪去一个三角形，使得用一根线在A点把它悬吊起来时它的长边能保持绝对的水平，如插图所示。他把这孩子难住了，因为他要求她在另一块纸板上也找出这样的A点来，使得照样剪去一个三角形后再用一根线吊起来会有同样的效果。”当然，这个点决不能通过试剪的方法找出来。在这道趣题的背景中，有一个奇特而狡猾的地方。读者能发现它吗？

200 一道关于放风筝的趣题

我陪着我的朋友海弗利特教授到苏塞克斯郡的南部丘陵参加了一个科学风筝竞赛。在此期间，一个情景促使我投入了一项小小的计算，它应该引起读者的兴趣。当时这位教授正从一个绕线轴上放出系着他风筝的金属线，这根金属线在绕线轴上绕成了一个标准的球形。这个金属线球的直径正好是两英尺，而金属线的直径是一百分之一英寸。这根金属线有多长呢？

好,这样一道人人都能完全理解的简单的小问题,将使许多人不知怎样解答。我们来看看,我们能不能不用什么深奥的数学计算就得到一个粗略的答案——比方说,与正确答数的误差在一英里之内!我们假定,当金属线完全绕起来后,这个球是完全实心的,而且没给要穿过它的绕线轴留出地方。做了这种简化之后,我很想知道有多少读者能说出这根金属线的长度,误差甚至可以大到一英里。

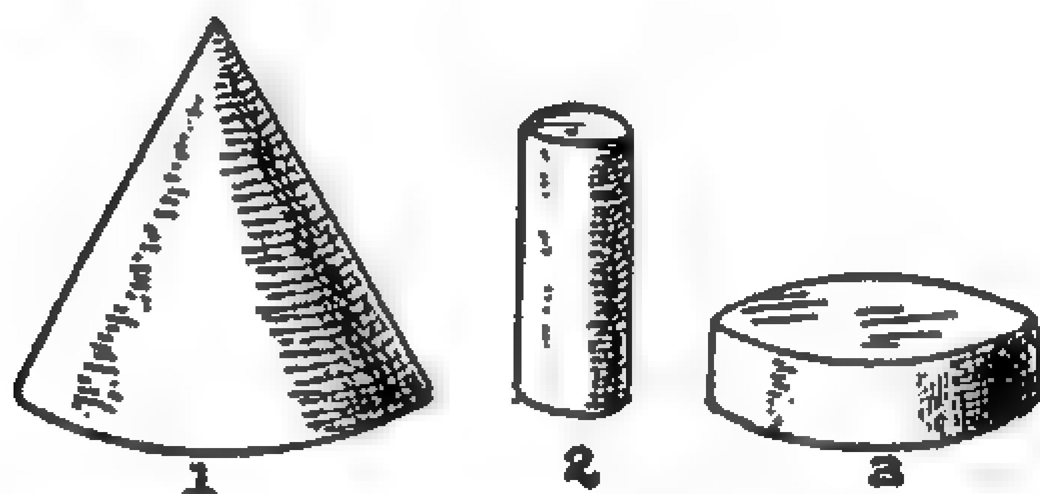
201 怎样做蓄水箱



插图中我们这位朋友有一大张白铁皮,尺寸(在切割前)是八英尺长三英尺宽。他已经从四个角上割下了那些正方

形小块(大小都一样),现在打算把四周折起来,焊住边缝,做成一个蓄水箱。但有一个问题令他大伤脑筋:要使这个蓄水箱所能贮存的水量达到最大,他割下的那些正方形小块是不是大小恰当呢?你知道,如果把它们割得非常小,那就得到一个很浅的蓄水箱;如果把它们割大了,就得到一个又高又细的东西。问题完全在于找出一种能使这四个正方形小块的大小恰到好处的切割样式。我们怎样才能避免它们被割得过小或过大呢?

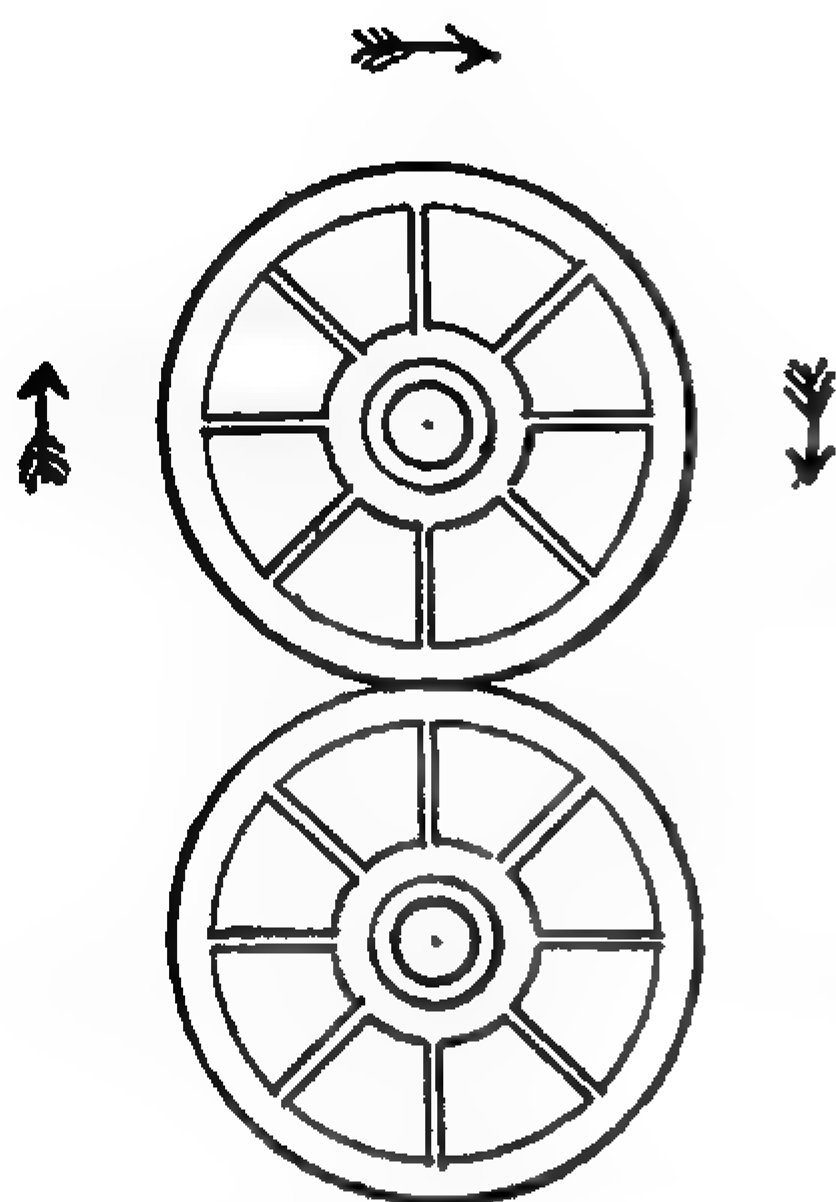
202 圆锥趣题



我有一个木圆锥体,如图 1 所示。我怎样把它切割成一个最大的圆柱体呢?可以看到,我可能切割出一个又高又细的圆柱体,如图 2 所示,也可能切割出一个又矮又粗的东西,如图 3 所示。但它们都不是最大的。如果知道了其中的规律,一个小孩也能告诉你从哪儿切割。你能不能找出这条简单的规律?

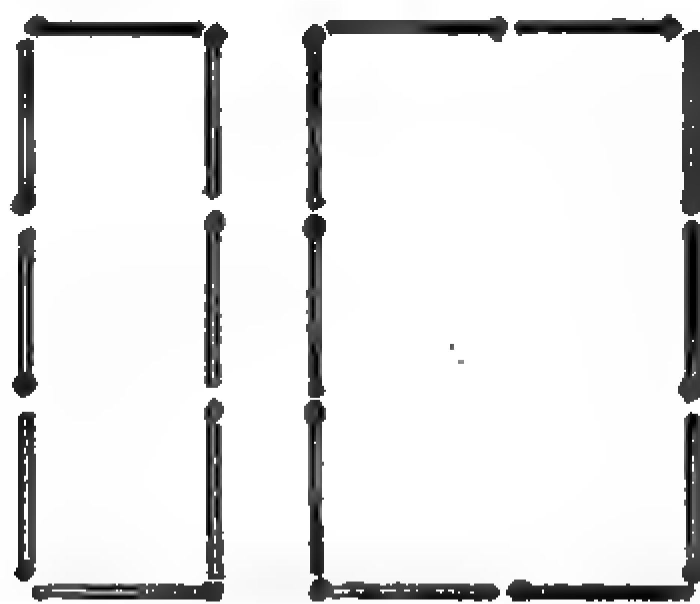
203 关于轮子

关于轮子的运动,有一些奇特的事情,很容易让新手感到困惑。例如:如果一列火车正在从伦敦开往克鲁,那么在任何给定的瞬间,火车的某些部分实际上是在从克鲁向伦敦运动。你能不能把那些部分指出来?这似乎很荒唐,同一列火车的不同部分居然能随时随刻地背道而驰,但情况就是如此。



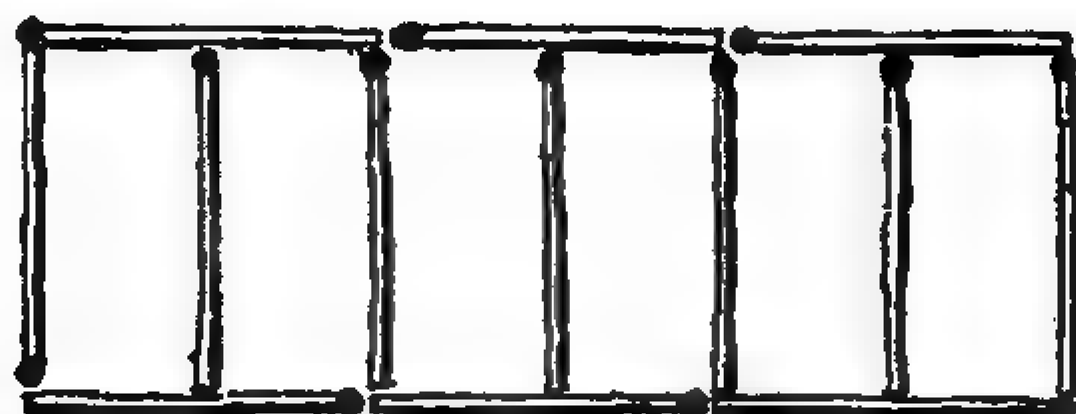
在所附的插图中有两个轮子。假定下面那个固定不动，上方那个按箭头方向围着下方那个滚动。好，上方轮子在下方轮子上滚了整整一圈后，它绕自己的中心轴转了几圈？不要急着给出解答，否则你差不多肯定会犯错。用两枚一便士硬币在桌子上做个实验，正确的答案会使你大吃一惊，如果你看出了正确答案的话。

204 一道新的火柴趣题



如插图所示，十八根火柴摆得围成了两个区域，其中一个是另一个的两倍大。你能不能把它们重新摆放，使得它们：(1)围成两个四边区域，其中一个是另一个的三倍大；(2)围成两个五边区域，其中一个是另一个的三倍大？在每种情况中，这18根火柴都必须妥善地用上，那两个区域必须完全分离，而且不能留有尾巴，火柴也不能叠置。

205 六个羊圈



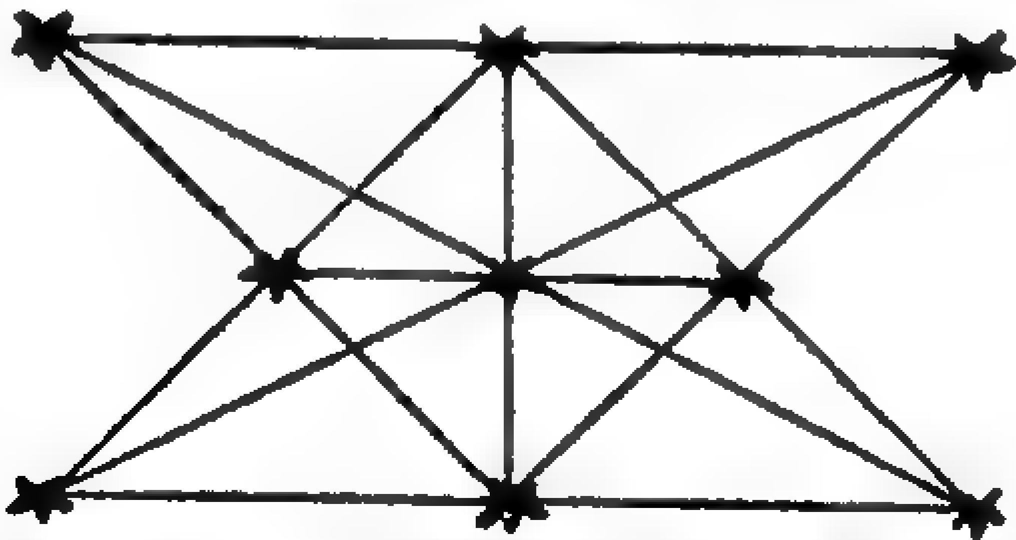
这儿又是一道关于火柴的小趣题。从插图中可以看到,有十三根火柴,代表着一位农夫的栏架,摆得围成了六个同样大小的羊圈。现在,其中的一个栏架被人偷走了,这位农夫还是想用余下的十二个栏架围出六个同样大小的羊圈。他应该怎样来做到这一点呢?这十二根火柴都必须妥善地用上,不能有火柴叠置,也不能留有尾巴。

点与线问题

律上加律，例上加例[①]；这里一点，那里一点。

——《圣经·以赛亚书》第28章第10节

许多人都发觉以“点与线”而闻名的一类问题非常有趣。这里给出一个例子：请你种九棵树，使得它们能连成十行，每



行有三棵树。这个我们十分熟悉的问题，是艾萨克·牛顿爵士

① 原文为Line upon line，line upon line。这里采用了《圣经》中文和合本的译法。——译者注

提出的。但是我认为，这类趣题最早收集在一本非常少见的小册子——《冬日傍晚的理智型娱乐活动》(*Rational Amusement for Winter Evenings*)里。我藏有这本书，它出版于1821年，作者是约翰·杰克逊(John Jackson)。这位作者给出了十个“植树成行”的例子。

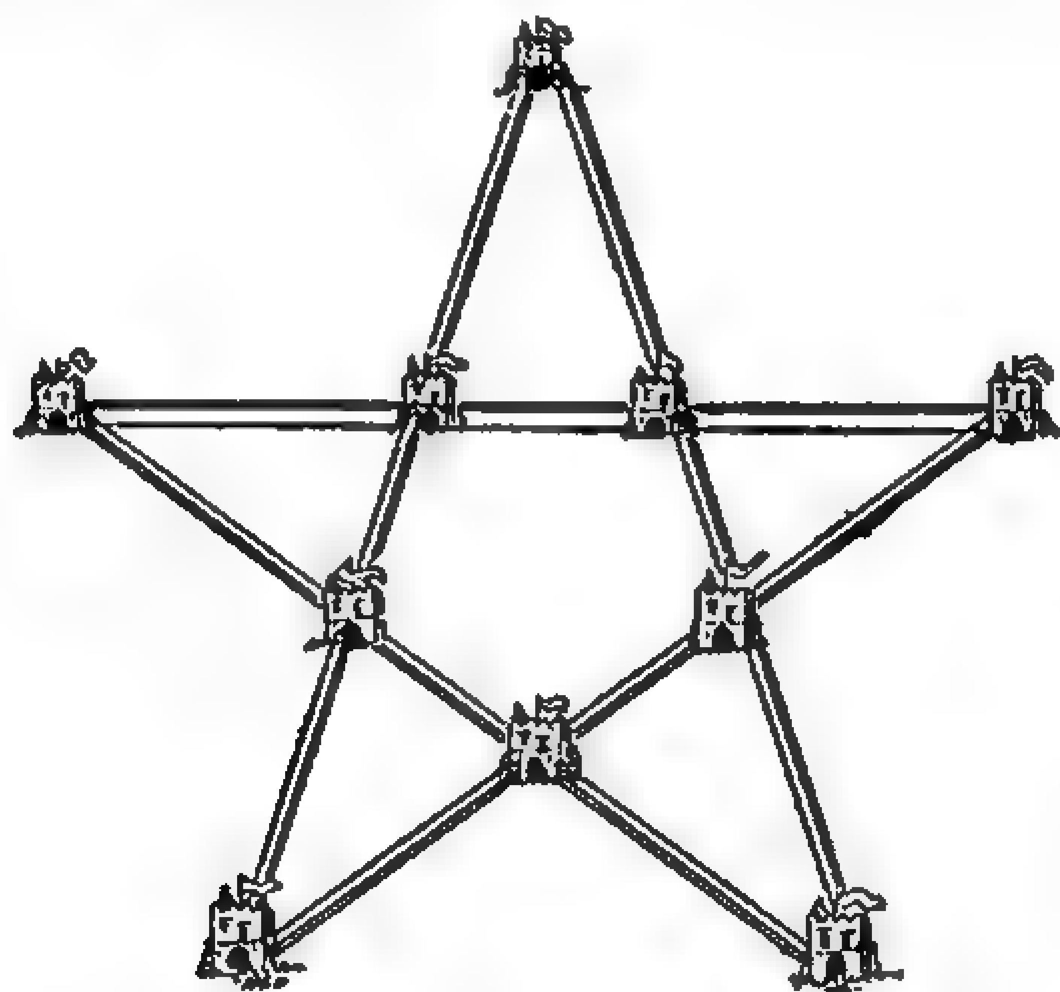
这些植树趣题从来就是一种让人绞尽脑汁的东西。它们是真正的 puzzles(难题)，这里是指这个词的最本原的意义[1]，因为还没有人成功地找出一种直接解决它们的确定性方法。这类题目要求你运用聪慧，发挥技巧，保持耐心，而我们称之为“运气”的东西有时也会起作用。或许有一天，一位天才将发现彻底解开这个奥秘的钥匙。记住必须把这些树仅看作点，这是因为如果允许我们把树弄得足够大，我们很可能会“夸大”我们的草图，收进少数额外的行，这些行与其说真的存在，不如说看起来存在。

---

① puzzle 的第一义是“难题”；第二义是“智力趣题”。本书常用其第二义(一般译作“趣题”)，但这里强调其第一义。——译者注

206 国王与城堡

古时候,曾有一位威震天下的国王,他在军事建筑设计方面有一些古怪的想法。他认为对称形式中蕴藏着以最小代价获取最大功效的伟大思想,而且老是引用蜜蜂的例子——蜜蜂以完美的六边形巢室构成它们的蜂巢——来证明大自然支持他的观点。他决定在他的国土上建造十座新的城堡,并用防御工事墙把它们全部连接起来,这些墙要形成五条直线,每条直线上要有四座城堡。皇家建筑师呈上了初步的设计图,它就像我

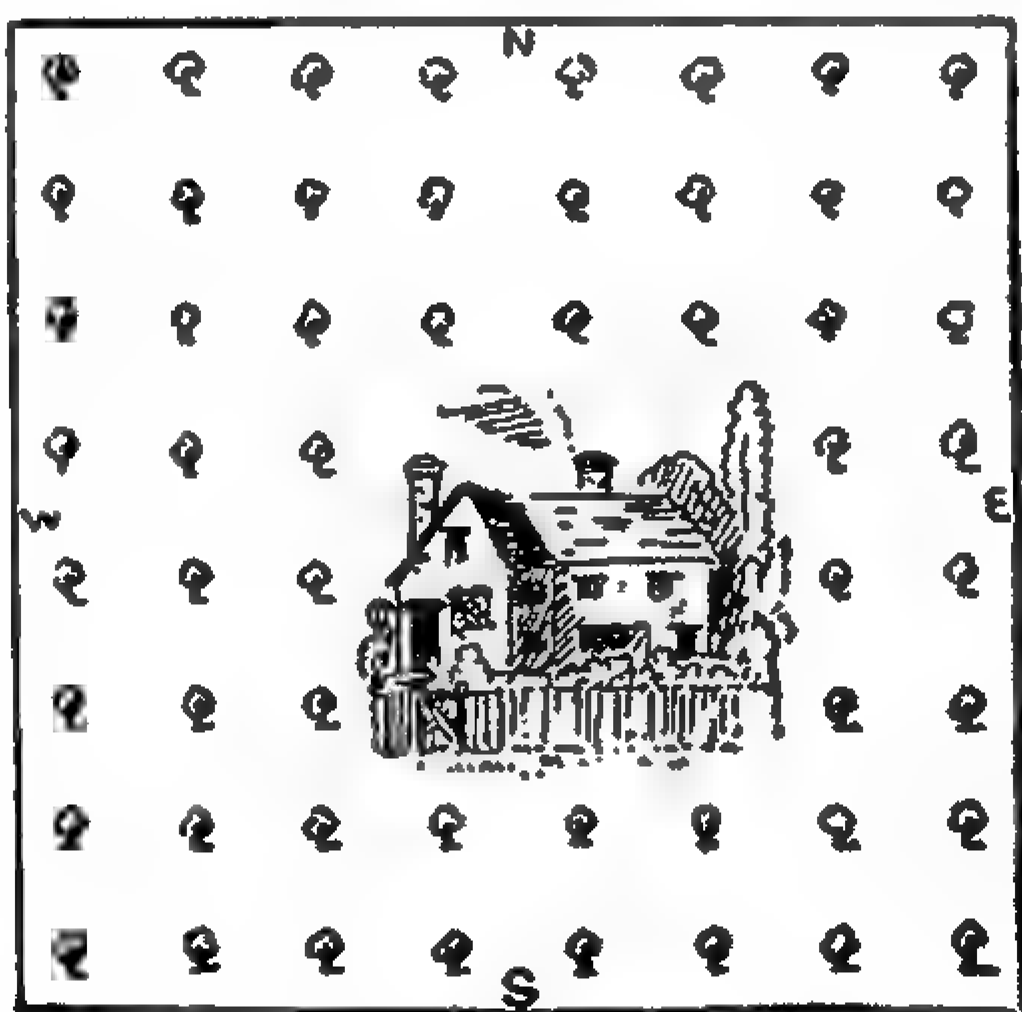


给你们看的那个样子。但这位君主指出,这里每一座城堡都能从外面直接抵近,于是命令这个设计应予以修改,要使得尽可能多的城堡能免受外来的直接攻击,它们只有翻过防御工事墙才能抵达。这位建筑师回答说,他认为要设计得即使只让一座城堡(国王打算用以作为王室住所)受到如此保护也是不可能的。但国王陛下向他点明怎样可以做到这一点后,他立即茅塞顿开。你会怎样来建造这十座城堡以及那些防御工事墙,以最大限度地满足这位国王的要求?记住,它们必须形成五条直线,每条直

线上有四座城堡。

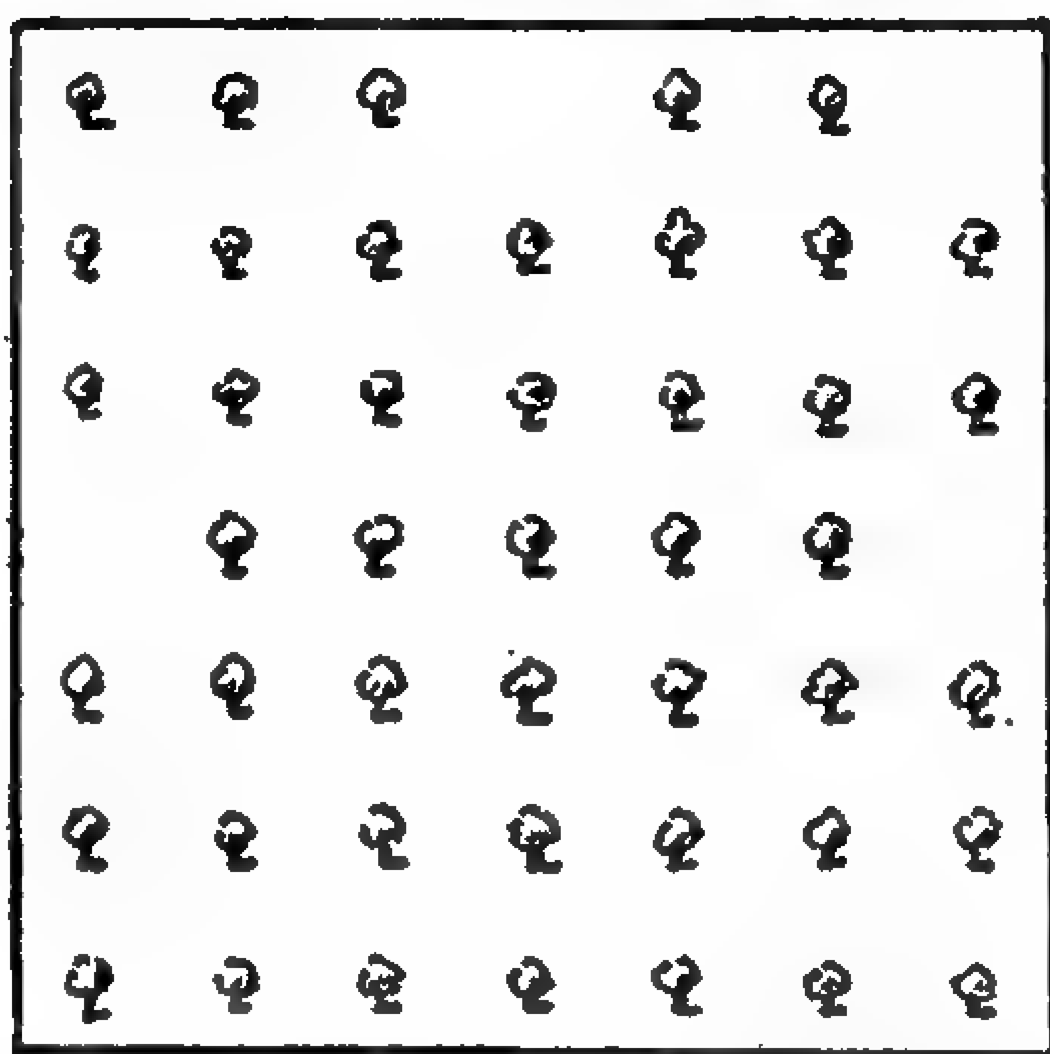
207 樱桃树和李子树

这幅插图是一幢别墅的示意图。这幢别墅处在一个果园之中,那里一共种了五十五棵果树,其中十棵是樱桃树,十棵是李子树,其余都是苹果树。樱桃树种得可以连成五条直线,每条直线上有四棵樱桃树。李子树也种得可以连成五条直线,每条直线上有四棵李子树。这道趣题要你指出这十棵樱桃树是哪些树,这十棵李子树又是哪些树。为了让樱桃树和李子树具有最有利的方位,(在满足所给条件的前提下)它们在果园北面和



东面的边上种得尽可能少。当然,在分辨这十棵树(根据具体情况,或许是樱桃树,或许是李子树)时,你完全不必理会介于其间的树。这就是说,一条直线上只要有我们所考虑的那个种类的四棵树就成,不管它们之间有什么其他种类的树(或那幢房子)。做了上面那道趣题后,这道题应该很容易。

208 一道关于种植园的趣题



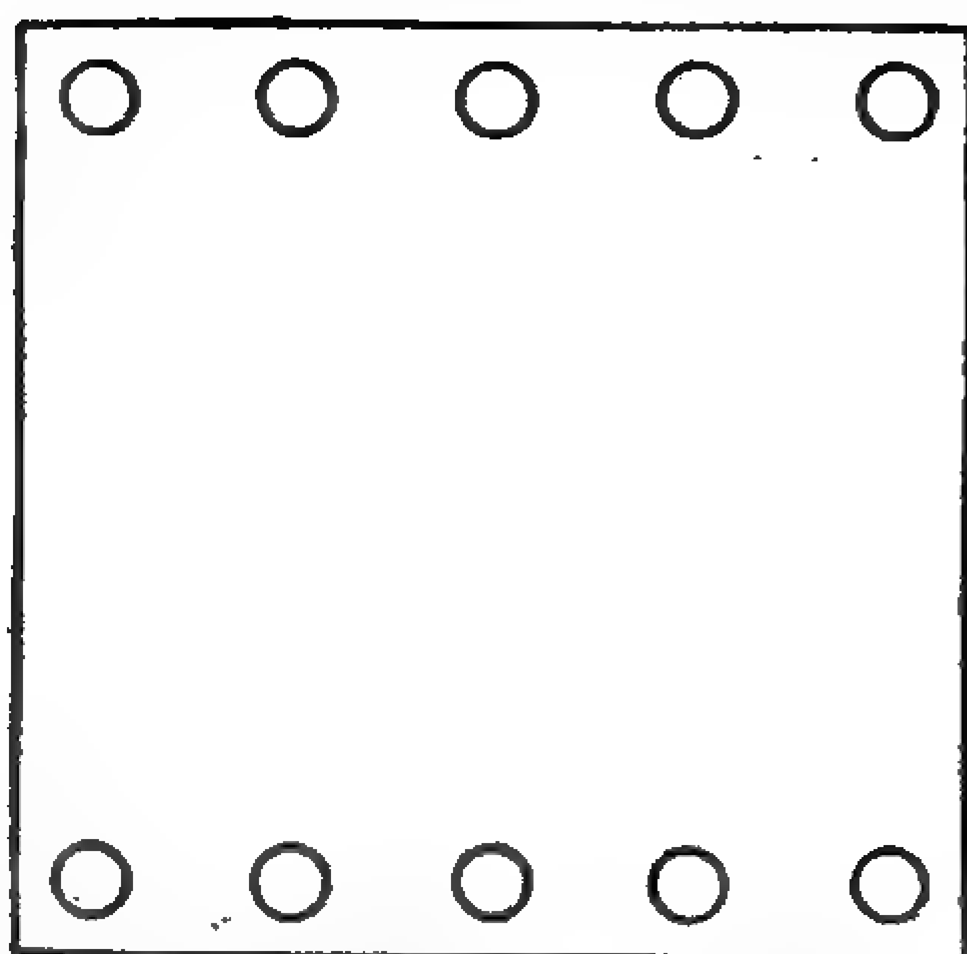
有一个人，拥有一个正方形的种植园，那里种了四十九棵树。然而，从插图中的空缺，我们知道有四棵树被大风吹倒并抬走了。他现在想把余下的树砍倒，只留十棵。这十棵树要能连成五行，每行要有四棵树。他必须留下哪十棵树呢？

209 二十一棵树

一位绅士想在他的花园里种二十一棵树，这二十一棵树要种得能连成十二行，每行有五棵树。你能不能向他提供一个满足这些条件的美丽对称的布局方案？

210 十枚硬币

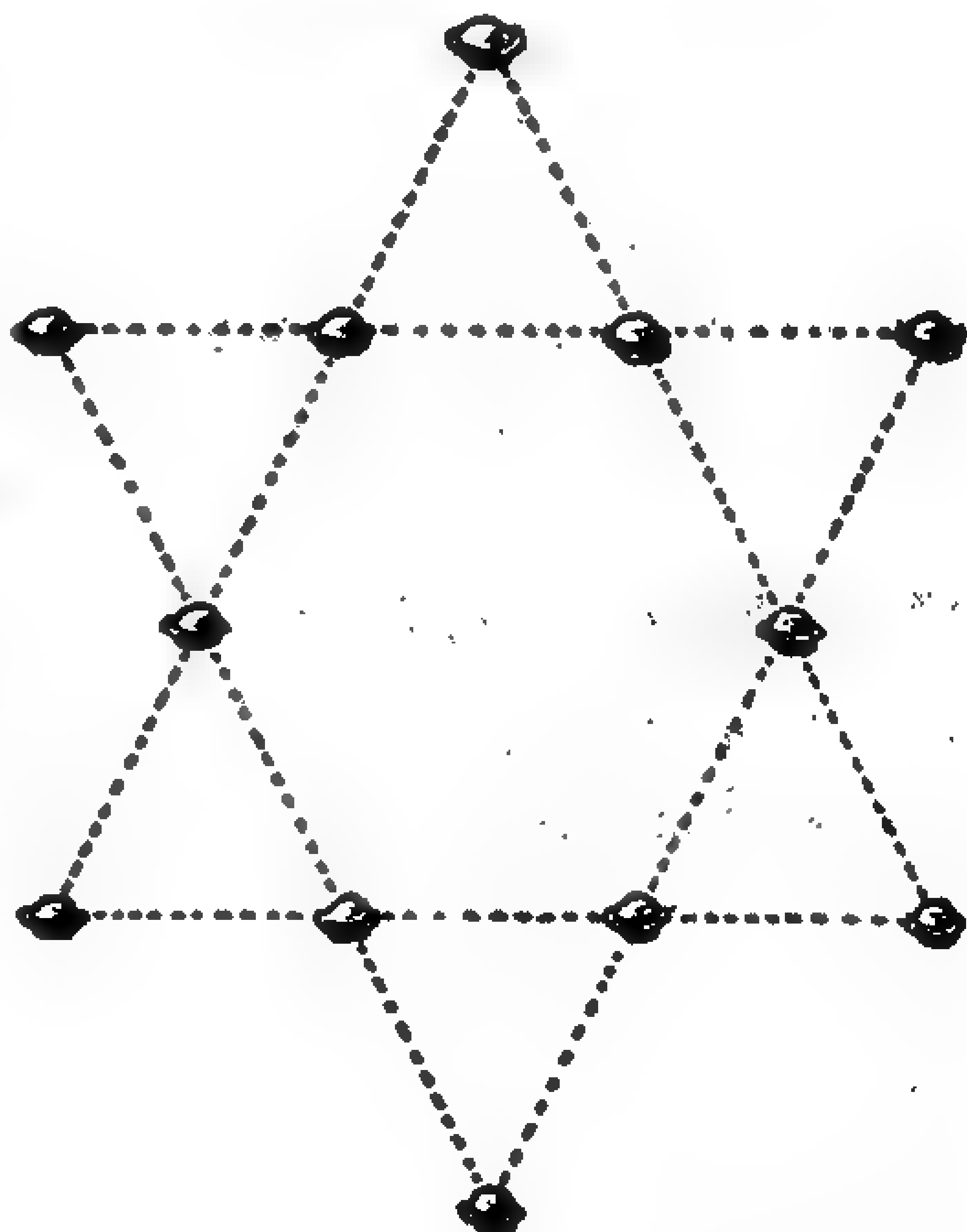
如下页插图所示，把十枚硬币放在一大张纸或纸板上，每边五枚。现在拿走其中四枚，其他的原封不动。将这四枚硬币重新放上去，使得这十枚硬币能连成五条直线，每条直线上有



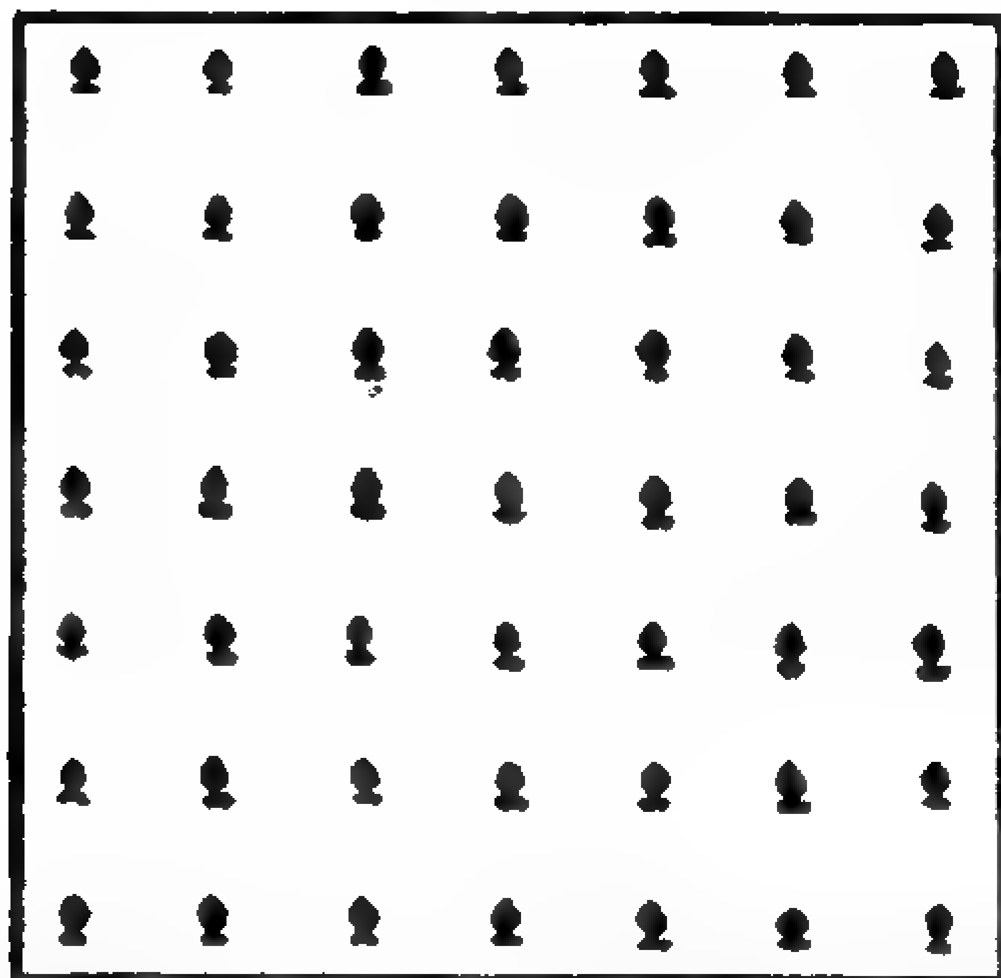
四枚硬币。这本身并不难，但是你应该争取求出能解决这道趣题的不同方式一共有多少种。假定在任何情况下一开始都是这样的两行硬币。

211 十二块馅饼

从我们的插图可见，十二块肉馅饼可以在桌子上放得连成六行，每行有四块饼。这道趣题要求你只是把其中的四块挪到新的位置上，就使得它们能连成七行，每行有四块饼。你会挪动哪四块？把它们挪到什么位置？



212 缅甸的种植园



前不久，我收到了一封由上缅甸地区密铁拉的英国特遣牧师寄来的有趣来信。我的这位来信者告诉我，他在坐船外出的途中试图解决这道小小的难题，结果发觉它真是有点儿意思。

假定他有一个种植园，其中有四十九棵树，它们种得排成了一个方阵，如图所示，他希望知道，他砍倒其中哪二十七棵树，才能使仍然屹立的二十二棵树会连成尽可能多的行，每行四棵树。

当然，任何一行都不可以有多于四棵的树。

213 土耳其人与俄罗斯人[①]

这道趣题同我几年前在《趣闻》杂志上发表的阿夫里迪[②]问题非常相似。

---

① 在 1877—1878 年的俄土战争中，由于英国的干涉，俄罗斯未能完胜。这道题目及其解答，多少反映了作者对这次战争的态度。—— 译者注

② 阿夫里迪（Afridi）是阿富汗东南边界地区的一个山地部落。在 19 世纪的英国侵阿战争中，阿夫里迪人多次袭击英军的运输线，令英军很伤脑筋。——译者注

点与线问题

在一片平坦的乡村开阔地上，驻守着一支俄罗斯步兵队，他们每人占据了一个不同的位置。突然，三十二名土耳其人前来袭击，他们从四面八方向这些俄罗斯人开火。每个土耳其人同时射出了一颗子弹，每一颗子弹从三名俄罗斯军人的脑袋上方紧贴着头皮飞过。已知这些射出来的每一颗子弹各打死了一个人，这道趣题要你求出这支俄罗斯军队至少由多少名军人组成，每一方各有多少人阵亡。

筹码移动问题

没有筹码,我可算不出来。

——威廉·莎士比亚:《冬天的故事》第4幕第3场

这种类型的趣题,除了那些因实际的游戏(例如国际象棋)而产生的之外,看来是一种比较现代的新事物。近代的数学家,著名的如范德蒙德[1]和赖斯[2],曾经给予它们一些关注,但它们显然并没有得到古代学者的青睐。就筹码游戏而言,除了在奥维德的作品[3]中明确提到的那个比较简单的游戏(见《坎特

① 亚历山大-泰奥菲勒·范德蒙德(Alexandre-Théophile Vandermonde,1735—1796),法国数学家,行列式理论的奠基人之一。有一种特殊的行列式被命名为"范德蒙德行列式"。——译者注

② 赖斯(M. Reiss),19世纪的德国数学家,生卒年不详。对行列式理论、对策论和组合数学(区组设计)的早期发展有所贡献。——译者注

③ 奥维德(Ovid,公元前43—公元17),古罗马诗人。这里所说的作品,指他的《爱的艺术》(*Ars Amatoria*)。——译者注

伯雷趣题集》第 110 题“奥维德的游戏”。画圈打叉游戏[①]可能由这个游戏而来)外,历史上最古老和最著名的或许就是“九子棋”(Nine Men's Morris[②])了。这个游戏还有许许多多其他的名称,我在下面说一说。

在法国,这个游戏叫做 Marelle[③];在波兰叫做 Siegen Wulf Myll[④];在德国和奥地利,则叫做 Muhle[⑤];在冰岛,它以 Mylla[⑥]的名字流传;而南美的弓箭手(或者当地的土驳船水手)据说也玩这个游戏,在亚马孙河流域它被称为 Trique[⑦],并被认为起源于印第安人。在我们这个国家,它在不同的地区有不同的名称,例如 Meg Merrylegs[⑧]、Peg Meryll、Nine Peg o'Merryal、Nine-Pin Miracle、Merry Peg 和 Merry Hole[⑨]。莎士比亚在《仲夏夜之梦》

---

① 即“连城”:对局双方轮流在一“井”字形的方格中画“○”和“×”,以先使得三个“○”或三个“×”成一排者为胜。——译者注

② 这里的 Morris,系 merels 的变体,merels 即 merel 的复数,源于中古法语的merele、marele,义“筹码”。——译者注

③ 显然从中古法语 marele 而来。——译者注

④ Siegen 系德语 Ziegen(母山羊)的变体,Wulf 和 Myll 分别是英语 wolf(狼)和mill(磨坊、磨盘)的变体。mill 是“九子棋”的另一英语名称。关于这一名称的来历,众说纷纭。一说系 merel 的误读。一说九子棋棋盘就像个磨盘,特别是中心的那个正方形,被古代凯尔特人称为 Cauldron(大锅)或 Mill,象征“新生”。一说该棋要求弈棋者尽量把己方的三颗棋子放成一排,这种形态被称为 mill。(是不是因为这就像两人在推一个磨盘?)一说北欧神话中海神埃吉尔(Aegir)的九个女儿就在磨盘岛(Island Mill)上活动,这正像在棋盘上走动的(每人)九颗棋子。——译者注

⑤ 现代德语中写作 Mühle,相当于英语的 mill。——译者注

⑥ 显然相当于英语的 mill。——译者注

⑦ Trique 也是墨西哥一个印第安民族的名称。——译者注

⑧ 即海神埃吉尔的九个女儿。Meg,撒克逊语,义“少女、小姐”。——译者注

⑨ 这里的 Merry、Meryll、Merryal,甚至 Miracle,可能均系 merel 的误读。Peg,桩;Pin,柱;Hole,洞。在野外玩九子棋时,可在泥地上挖一些洞,形成棋盘,以小木桩或小木柱为棋子,插在洞内。——译者注

(*Midsummer Night's Dream*)第二场第一幕中提到了它：

“下九子棋的草皮上满是湿泥；

奇异的迷宫穿行于乱草之中，

由于无人踏行，已经模糊依稀。”

牧羊人在草皮上挖一些洞，用石子来玩这个游戏。北安普敦郡的农民诗人克莱尔[①]在《牧羊童》(*The Shepherd Boy*, 1835 年)中写道：“我们经常循迹追踪，寻找他的停留之处……刻在草地上的九子棋棋盘，便是我们的依据。”德雷顿[②]在他的《福地》(*Polyolbion*)中也提到了这个游戏。

它出现在锡尔切斯特考古发掘期间[③]出土的一块古罗马瓷砖上，它被镌刻在雅典卫城的台阶上。数年前我参观克里斯蒂安尼亚博物馆[④]，看到了 1880 年在戈克斯塔德[⑤]发现的那艘硕大的维京船[⑥]。这艘船的甲板是用橡木板拼成的，可以发现在这些橡木板上有一些洞和线条，线条勾勒出了这个游戏的棋盘，而洞就是用来插小木桩的。那天我在阿姆斯特丹的荷兰国立博物馆(Rijks Museum)里细心观赏着古代的橡木家具，对一把给

---

① 约翰·克莱尔(John Clare, 1793—1864)，英国浪漫派农民诗人。——译者注

② 迈克尔·德雷顿(Michael Drayton, 1563—1631)，英国诗人。——译者注

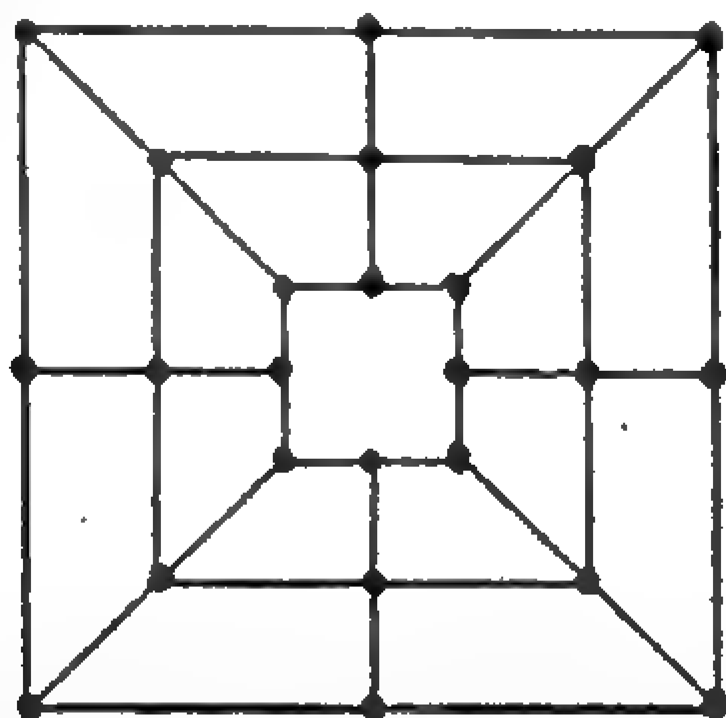
③ 锡尔切斯特(Silchester)是英格兰汉普郡北部一教区，附近有罗马不列颠时期重要城镇卡累伐阿特雷巴特姆(Calleva Atrebatum)的遗址。1890 年至 1909 年，伦敦古文物研究者协会(Society of Antiquaries of London)在此进行了长达 20 年的考古发掘。——译者注

④ 即现今挪威首都奥斯陆的历史博物馆。当时奥斯陆就叫克里斯蒂安尼亚(Christiania)。——译者注

⑤ 戈克斯塔德(Gokstad)是奥斯陆附近桑讷峡湾(Sandefjord)沿岸的一个庄园，下文提到的维京船是在该庄园内的一个墓穴里发现的。——译者注

⑥ 现已移至奥斯陆的维京船博物馆(又译“海盗船博物馆”)。维京(Viking)，8—11 世纪的北欧海盗。——译者注

慕道友[①]坐的老式高背长椅产生了兴趣，并且惊奇地发现在坐位的中央竟刻着这个游戏的棋盘——慕道友们随时可以偷偷地玩一把。已经发现，在我们英格兰好几个教区总教堂的唱诗班坐位上，都刻有这种棋盘。19 世纪 80 年代初，人们在修复北安普敦郡哈格雷夫教堂（Hargrave church）的时候，发现一块石头上刻有这种棋盘。这块石头是筑在一堵墙里的，而这堵墙可能是公元 1200 年前后的。现在这块石头由北安普敦博物馆收藏。后来，在林肯郡的塞姆普林汉姆（Sempringham）也发现了一块类似的石头。你会在马恩岛的一块古代墓碑上看到这种棋盘，它还被画在古代荷兰的瓷砖上。1901 年，在奥斯沃斯特里附近的一个砾坑里，人们挖出了一块石头，那上面不容置疑地有着这个游戏的一张棋盘。



这个游戏在不同的时期和不同的地方有着不同的玩法。我这里给出一张棋盘。有时候那些对角线会被删掉，但这样做的目的显然不是想改变玩法：这只不过是表明有人认为那些角顶点本身就足以标示出点的位置了。下面是斯特拉特[②]在他的

① 初信基督教但尚未受洗，正在接受口授教义训练的人。——译者注

② 约瑟夫·斯特拉特（Joseph Strutt，1749—1802），英国历史学家，版画家，古董鉴赏家和作家。——译者注

《英国人的体育娱乐活动》(*Sports and Pastimes of the English People*)中对这个游戏的描述,它同我小时候的玩法是一致的:"对局双方各执有九颗棋子或者说九颗子儿,轮流把它们放在点上,每次放一颗;双方的任务都是阻止对方将其棋子放成三颗一排,而且不能有一颗对手的棋子插在其中。如果这样的一排给放成功了,那么做成这件事的一方就可以在他认为最有利于自已的地方将对方的一颗棋子取走,除非下面这种情况:对方已放成一个三颗一排,那么只要他在棋盘上另有一颗棋子并非这三颗一排中的一颗,这三颗一排中的棋子是绝对不许动的。当所有的棋子都放完之后,就可以把它们沿着线条的方向前后走动,但是每次只能从一个点走到(相邻的)另一个点。将对方所有的棋子都取走的人就是赢家。"[1]

---

[1] 1993 年,德国数学家加塞尔(Ralph Gasser)用计算机证明:如果九子棋的对局双方从一开始每一步都采取最优走法,那么他们将以平局告终。——译者注

214 六只跳蛙



图中这六只有教养的跳蛙已被训练得能把它们的排列顺序反过来，使得它们的编号念起来是6、5、4、3、2、1，而且现在空着的那个方格仍然空着。它们可以跳到相邻的方格（如果它空着的话），也可以越过一只蛙跳到其另一侧的方格（如果它空着的话），就像我们在国际跳棋中走子那样，而且向前跳还是向后跳随它们的意。你能不能说明它们是怎样以最少的步骤完成这一壮举的？这很容易，因此当你做完这件事之后，在右边加上第七只跳蛙，再试着做一下。然后不断加上跳蛙，直到你能给出对任何只数的跳蛙都适用、而且跳法最简短的解答。因为不管有多少只跳蛙，只要有那个空着的方格，这件事总能做到。

215 蚱蜢趣题

有人指出，这种趣题在16世纪和17世纪的伦敦城[①]很受青年学徒们的喜爱。读者大概注意到伦敦交易所（Royal Exchange）屋顶上那个奇特的铜蚱蜢。这个长命的家伙居然在1666年和1838年的大火中安然逃生。1579年逝世的食品杂货商托马斯·格雷欣爵士[②]的家族饰章，就是按蚱蜢的样子设计的；而且由于这个原因，蚱蜢被广大食品杂货商用作商店标志。遗憾的是，虽然这种趣题源远流长，且具有传奇色彩，但这里的

---

① the City of London，伦敦的市中心，系商业、金融等中心。——译者注

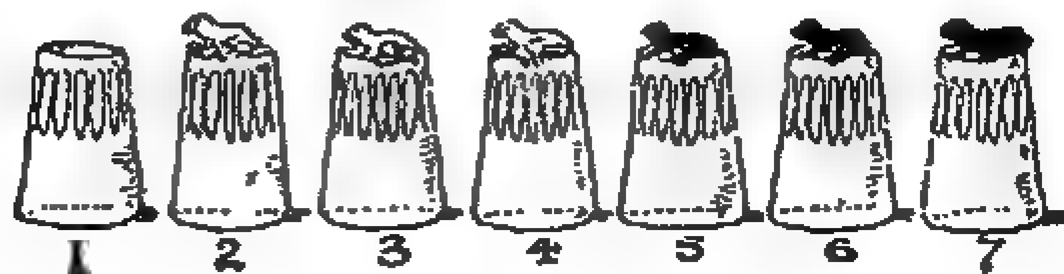
② 托马斯·格雷欣爵士（Sir Thomas Gresham，1519—1579），英国商人和金融家，伦敦交易所的创建者。经济学中有所谓"格雷欣法则"，即"劣币驱逐良币"，虽然这一法则并不是格雷欣提出的。——译者注



趣题只不过是迟至1900年才由我自己制作出来的。有十三个黑圆盘，其中十二个圆盘上各放有一枚编号筹码，一枚筹码代表一只蚱蜢。这道趣题要求你把它们的排列顺序反过来，使得它们的编号沿反方向念起来是1、2、3、4等，而且现在空着的那个圆盘仍然空着。每次移动一只蚱蜢（移动次序随你的便），或者移到相邻的空圆盘上，或者跳过一只蚱蜢，就像国际跳棋的走法。随便什么时候，只要可行，移动或跳跃可沿两个方向中的随便哪一个进行。完成这件事要用到的最少步骤是哪一些呢？

216 有教养的跳蛙

我们那六只有教养的跳蛙学会了一种绝妙的新本领。如插图所示，把它们放在平底玻璃杯上，它们就能左右换边，使得三只黑的换到左边，三只白的换到右边，而且空着的平底杯是另一端的第7号杯子了。它们可以跳到相邻的平底杯上（如果



那杯子空着的话),也可以跳过一只或两只蛙来到一个空着的平底杯上。跳跃可沿两个方向中的随便哪一个进行,而且一只跳蛙可以跳过与自己颜色相同的蛙,也可以跳过与自己颜色相反的蛙,甚至可以同时跳过两种颜色的蛙。下面这示范性的四次连续跳跃,使一切都变得很明白:从4跳到1,从5跳到4,从3跳到5,从6跳到3。你能不能说明它们是怎样用十步跳跃完成这件事的?

217 特威克纳姆[①]趣题

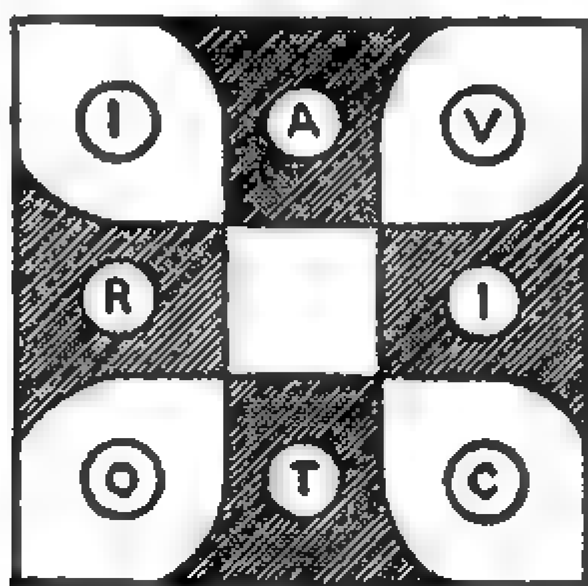


在这幅插图中,我们有十一个圆盘,围成了一个圆圈。在其中的五个圆盘上我们放了具有白色字母的黑色筹码(如图所示),而在另外五个圆盘上则放了具有黑色字母的白色筹码。最底下的圆盘空着。要求把这些筹码从这种状态变成一种

① 英格兰一地名,在伦敦西南方,以英式橄榄球体育场闻名于世。—— 译者注

井然有序的状态，也就是说，使得它们沿顺时针方向拼成TWICKENHAM（特威克纳姆）这个词，而原来空着的那个圆盘仍然空着。黑色筹码沿着时针转动的方向移动，白色筹码则沿着相反的方向移动。一枚筹码可以跳过一枚颜色与其相反的筹码，来到再下一个空着的圆盘。比方说，如果你的第一步是移动K，那么C就可以跳过K。如果接下来K又向E移动，你就可以将W跳过C，等等。这道趣题用二十六步就可以解决。记住：任何一枚筹码都不可以跳过颜色与其相同的筹码。

218 维多利亚十字架趣题



趣题制作者是一种独特的"区区小事攫取者"，他的产品常常是用最微不足道的材料做成的。别人完全看不见的，或者就是看见也认为无足轻重的细微末节，常常会给正在寻求难题的人提供一个绝妙的主题，或者一个他认为具有某种"基本价值"的想法。

在维多利亚[①]女王即位六十周年大庆的日子里，我正坐在一节火车车厢里，坐在我对面的是一位小姐。我的注意力被她

---

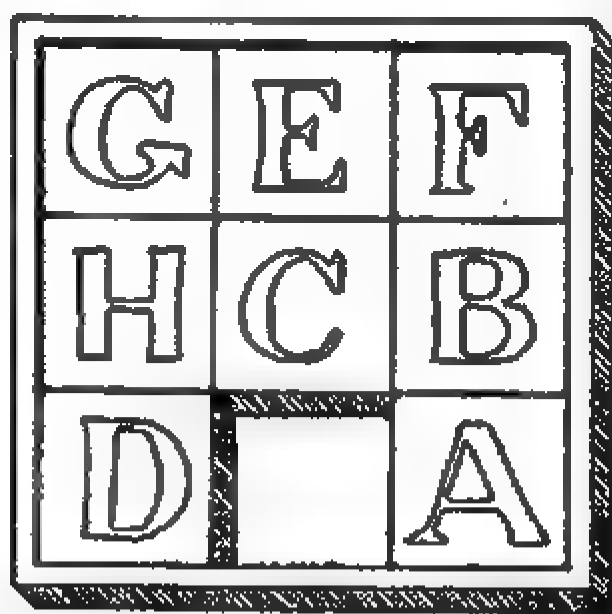
① 亚历山德里娜·维多利亚（Alexandrina Victoria，1819—1901），1837—1901年在位的英国女王和1876—1901年在位的印度女皇。——译者注

所佩带的一枚胸针所吸引。它取了马耳他十字架或者叫维多利亚十字架的形状，上面有着 VICTORIA（维多利亚）这个词的各个字母。这些字母的个数和布局立即启发我想出了这道我现在提出的趣题。

我们看到，这幅图由九个分区组成。这道趣题是要你完全按所示那样放置八枚有着 VICTORIA 这个词各个字母的筹码，然后每次滑动一枚筹码，从黑色分区到白色分区，或从白色分区到黑色分区，如此交替进行，直到它们沿同样方向围着读仍能读成这个词，只是首字母 V 要落在这十字架的黑臂中。无论何时都不能让两枚筹码同在一个分区。要求找出最简短的方法。

当然，跳步是不允许的。第一步显然非走 A、I、T 或 R 不可。假定你将 T 移到中央，下一步走的筹码将是 O 或 C，因为 I 和 R 都不能移动。在这道趣题的解答中有某种稍有点不同凡响的东西，我会予以说明。

219 字母滑块趣题



这个小玩意让我们想起了我们的老朋友“十五滑块趣题”[①]。有八个被画上字母的木块，放在一只盒子里，如图所示。

① 参见本系列《萨姆·劳埃德的数学趣题》第21题。——译者注

可以看到,你只能一次移动一个木块,暂时地把它移到空位上,因为不可以把木块从盒子里取出来。这道趣题是要你把这些木块滑来滑去,直到使它们形成如下布局:

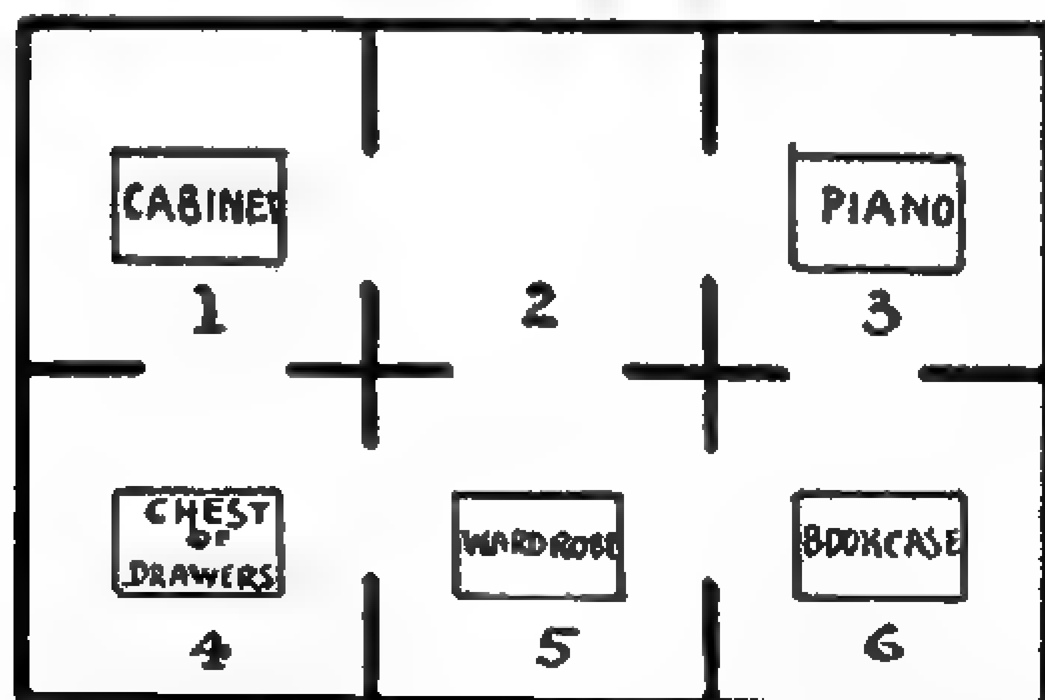
A B C

D E F

G H

如果允许你随意走多少步,你会发现这绝对不难。但是这道趣题要求以最小的步数完成这件事。我不会说这最小的步数是多少,因为读者可能喜欢自己把它求出来。在写下你的步骤时,你会发现必须要做的事只是按滑动次序记录字母。例如,你开头的五步可能是C、H、G、E、F;而且这种记法不可能产生歧义。在实际做题时,你只要有八枚筹码和画在纸上的一幅简图就行了。

220 出租屋里的一件难事

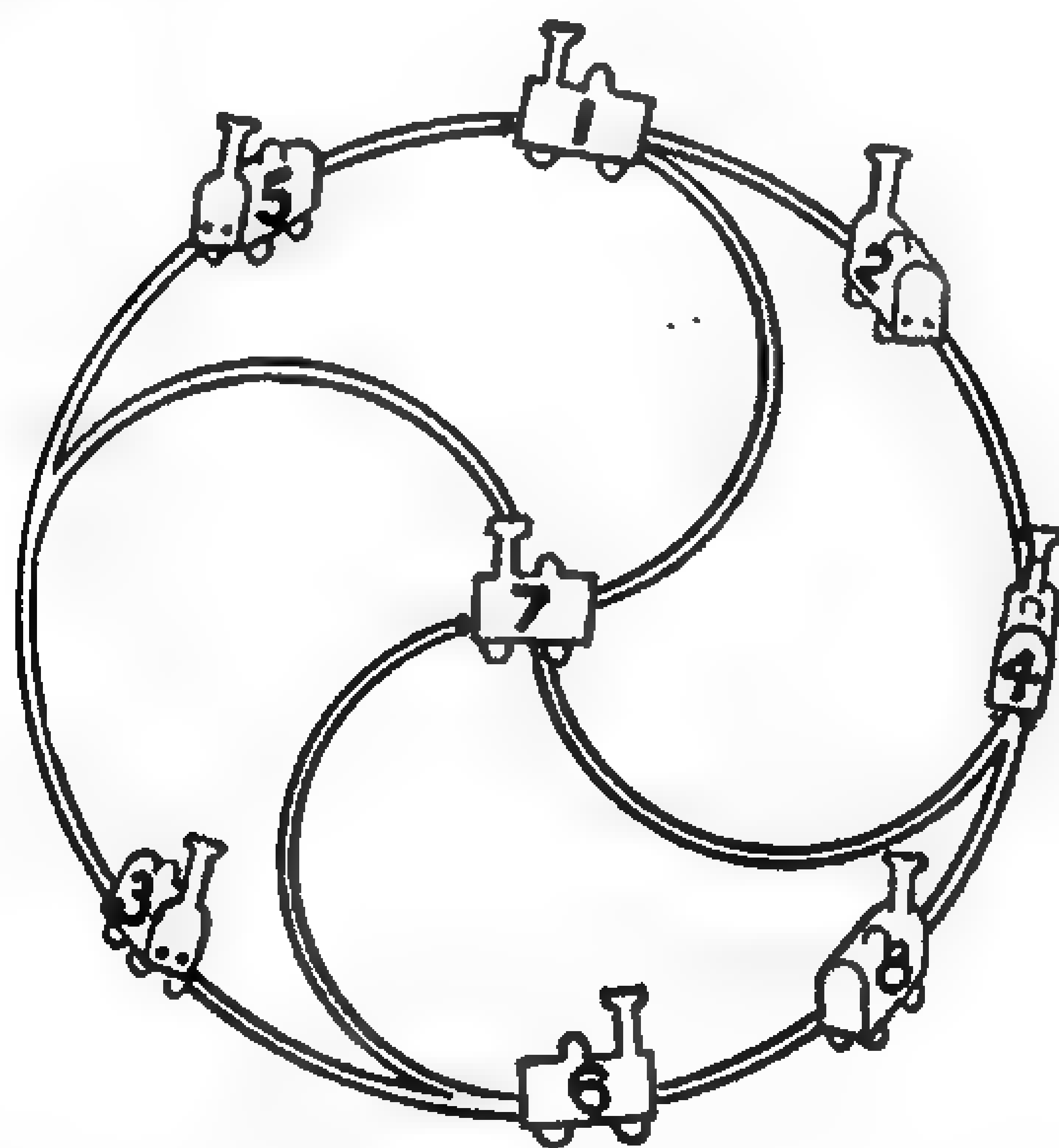


CABINET:陈列柜 PIANO:钢琴 BOOKCASE:书橱
WARDROBE:挂衣橱 CHEST OF DRAWERS:五斗橱

多布森一家在海滨小镇斯洛科姆弄到了几间房间。同一楼面上共有六间房间,都是相互打通的,如图所示。他们租

下的房间是4、5、6号，全部面向大海。但是发生了一件小小的难办之事。多布森先生坚决要求钢琴和书橱应该对换一下房间。这个想法很狡猾，因为多布森一家没有音乐细胞，但他们也要防止其他人来玩这个乐器。好，这些房间都非常小，而图中所示的那些家具设备又非常大，以至于任何一间房间都不能同时放下这些器具中的两件。怎样以最少的劳动实现这一对换？例如，假定你首先把挂衣橱搬进2号房间；然后你就可以把书橱搬到5号房间，而把钢琴搬到6号房间，等等。这是一道迷人的趣题，不过女房东有理由不表示欣赏。用筹码在一张纸上试验，以最少的移动步骤帮她办好这件难事。

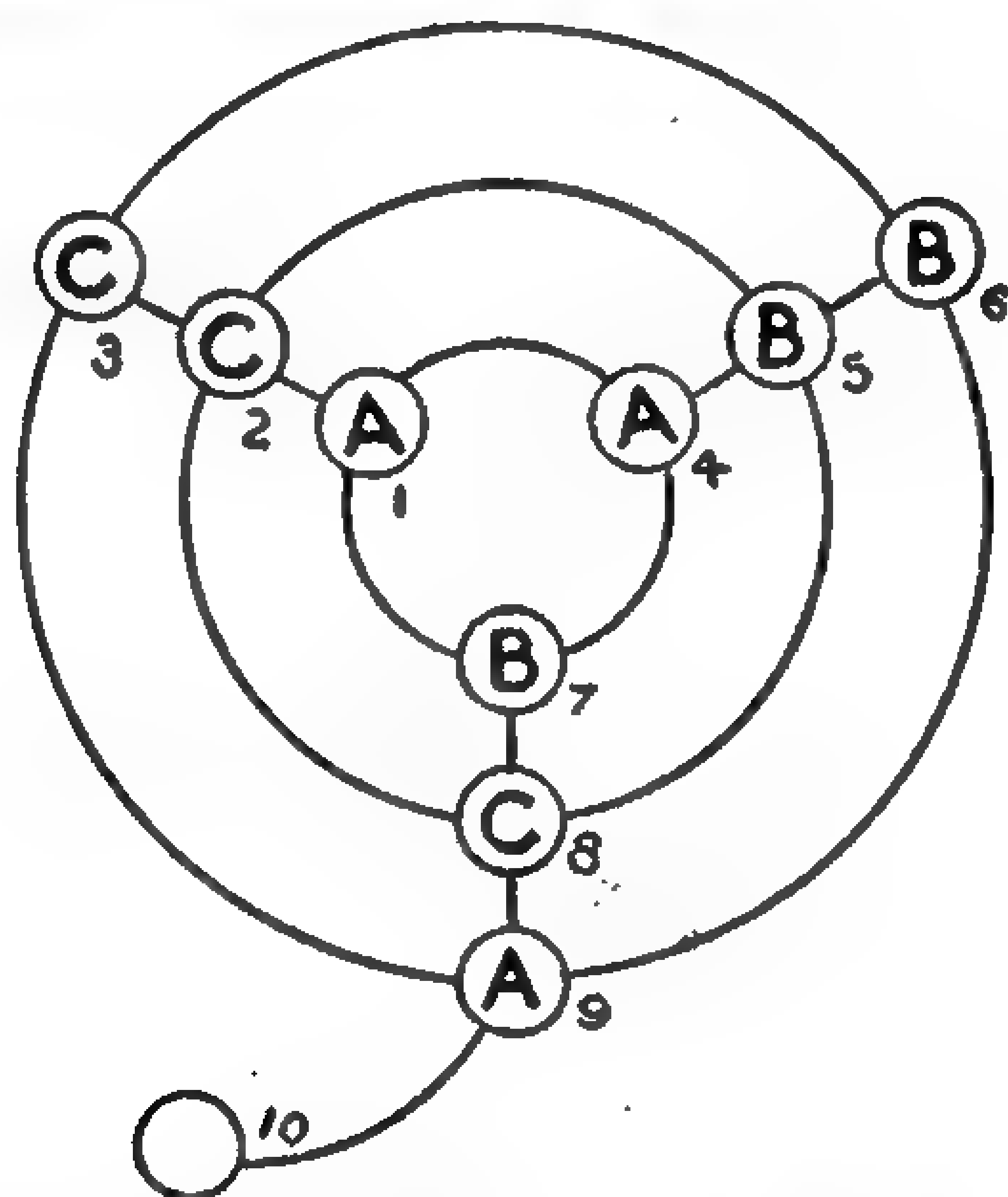
221 八台机车



这幅图表示一家铁路公司的机车停车场。这家公司的管理方式颇有些古怪，机车只允许停在所示的那九个点上，其

中有一个点目前空着。现在要求移动这些机车,每次移动一台,从一个点移到另一个点,一共移动十七次,使得它们的编号围着这圆圈按自然数顺序排列,而中央那个点空着。但是有一台机车已经熄火,因此不能移动。怎样把这件事做成呢?又是哪一台机车始终保持不动呢?

222 一道关于铁路的趣题

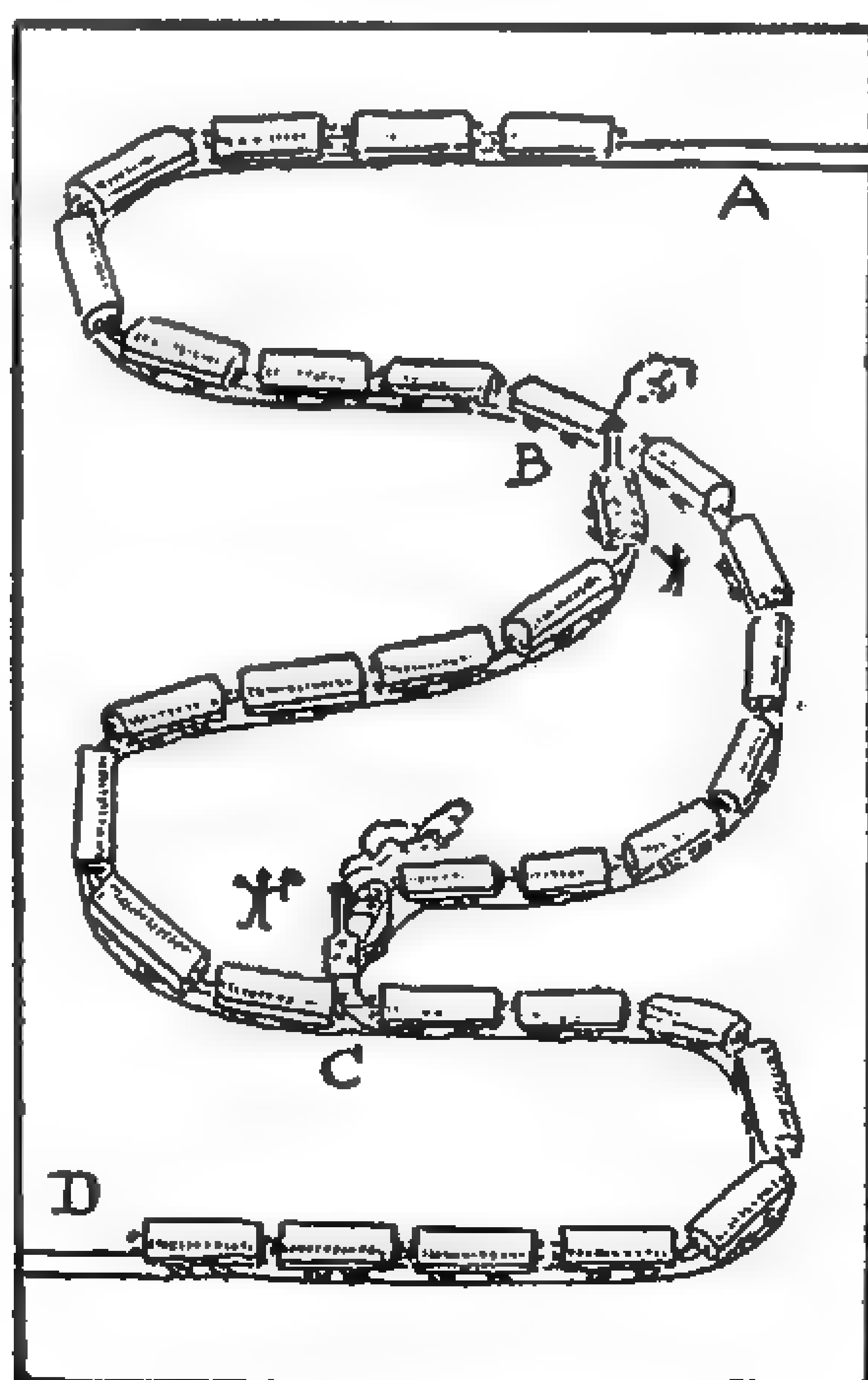


在一张较大的纸上按上图的样子画一幅草图,并在三枚筹码上标 A,在三枚筹码上标 B,在三枚筹码上标 C。可以看到,在线条的交点上有九个停车处,而第十个停车处连在外圆上,就好像字母 Q 的那条尾巴。将三枚标着 A 的筹码,或者说三台标着 A 的机车,以及三台标着 B 的机车和三台标着 C 的机车放在所示的停车处。这道趣题是要移动这些机车,一次移动

一台，沿着线条移动，从停车处移到停车处，直到你成功地使得每个圆周上都有一台 A 机车、一台 B 机车和一台 C 机车，而且每条直线上也都有一台 A 机车、一台 B 机车和一台 C 机车。要求你用最少的步骤做成这件事。你需要走多少步呢？

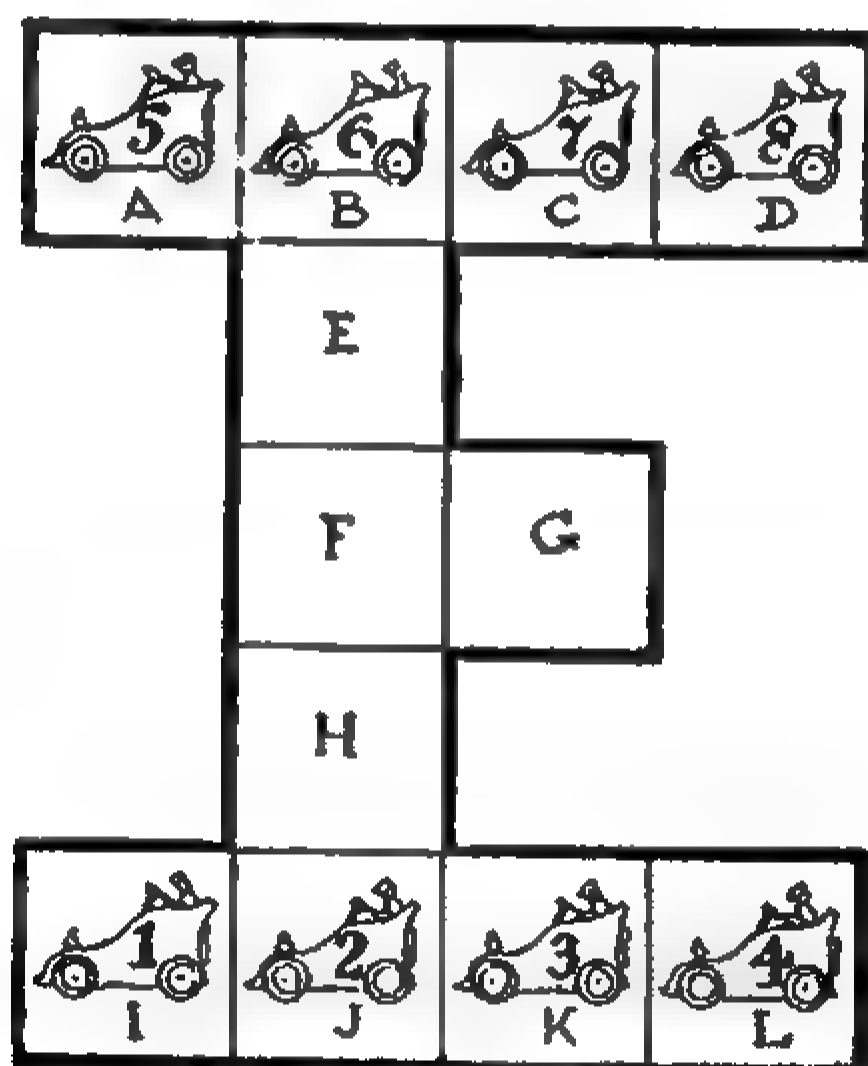
223 铁路上的一场混乱

这张示意图显示了伦敦、傻瓜镇和烂泥津铁路公司的一部分线路。这是一条单线带一条会车线。在 B 和 C 之间，无论是会车线的左侧线路还是右侧线路，都只能容下八节车厢或者一台机车加七节车厢。有一次，有两列货车（各由一台机车和十六节车厢组成）不知怎的开到了如图所示的位置。看来这是一个无法解决的僵局，双方的机车司机都要求对方把车倒回



邻近的车站，卸掉九节车厢。但是有一位足智多谋的司炉说保证可以让两列货车都通过，把它们送上各自的路程，而且机车都好好地在最前头。他还设法使机车的反向次数达到了最小。你是不是也能做成这件非凡的事？你需要让机车反向多少次？一次“反向”是指改变一次运行方向，从倒退变成前行，或从前行变成倒退。不许使用绳索牵引调车法、溜放调车法[1]或其他类似的方法。所有的操作必须由这两台机车按常规进行。如果用筹码来试解，这道题目将很简单，但很有趣。

224 停车库趣题



一家停车库老板遇到的难事变成了一种小小的消遣，这种消遣属于特别迷人的那种。你要做的只是在一张纸或纸板

① 即用机车推送车组，达到一定速度后摘钩，机车制动，车组以惯性继续前行，到达指定地点。——译者注

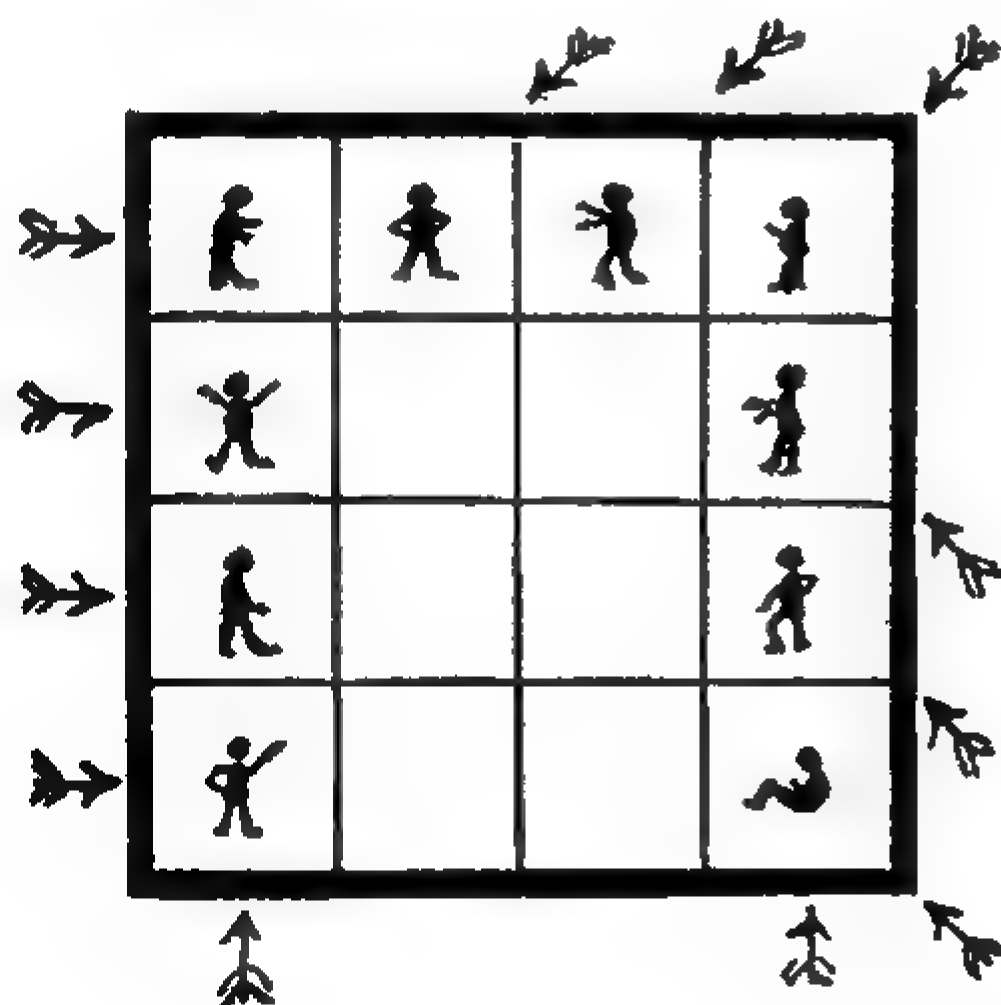
上画一幅平面图或者草图，并将八枚筹码从 1 到 8 编号。于是你们全家就可投入一场有趣的竞赛，看谁能找到解决这件难事的最佳办法。

上面的插图是一家停车库的平面图，这里有十二个车位。但是这停车库在建造时地基受到如此刁钻的限制，害得老板常常十分为难。举例来说，假定这八辆编号为 1 到 8 的汽车停在如图所示的位置上，那么怎样才能以最快捷的方式把它们移动得 1、2、3、4 号与 5、6、7、8 号对换位置（也就是说，编号仍然像现在这样从左到右顺序排列，但顶行与底行对换）？最小的移动次数是多少？

一次移动一辆汽车，不管移动多远，是否拐弯，都算一次。为防混淆，车位用方格标出，一个方格里同时只能有一辆汽车。

225 十名囚徒

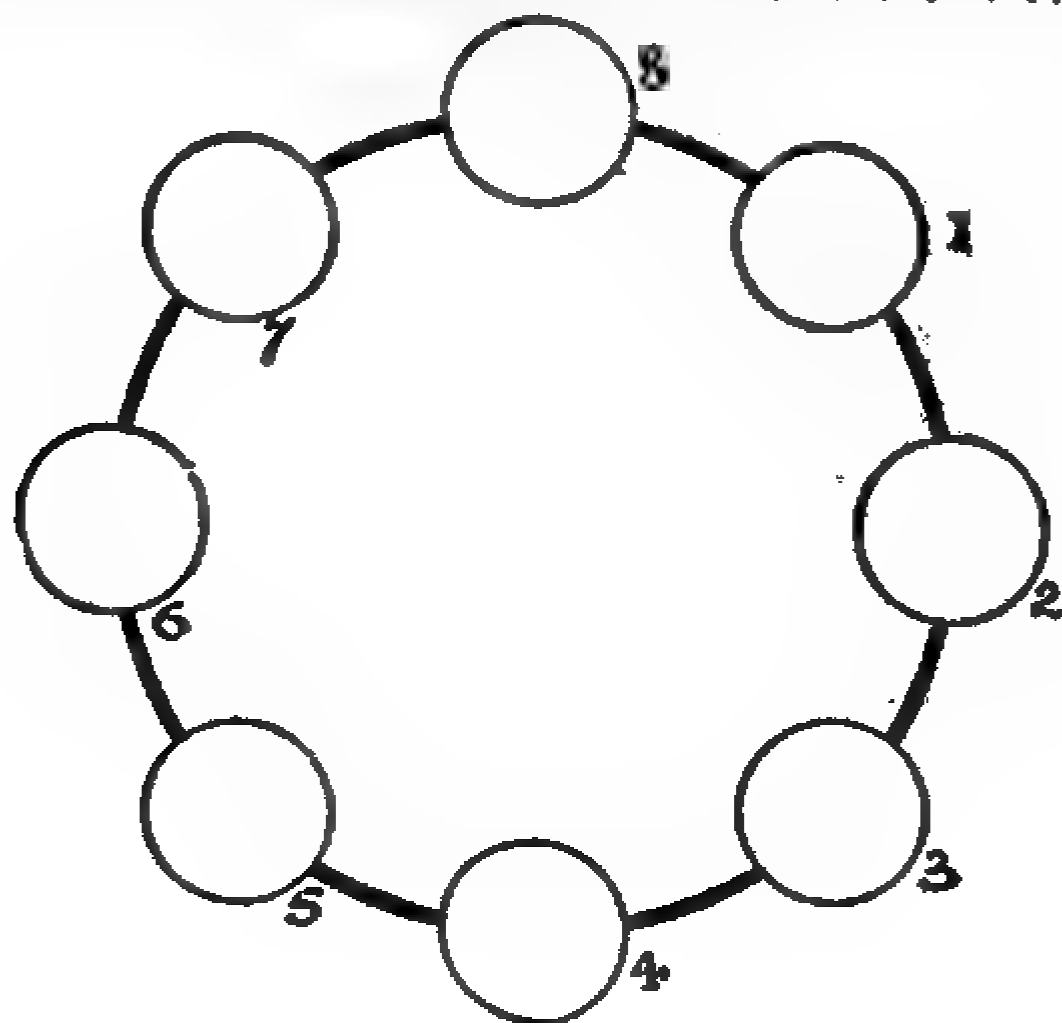
如果监狱没有什么其他用途了，那么它们可能为了趣题制作者的特殊利益而仍然保留着。它们似乎是一个取之不竭、



用之不尽的难题思想库。这里是一道小小的难题，它可能令读者感兴趣一小段时间。我们在插图中看到的是一所监狱，它一共有十六间牢房。十名囚徒各关在哪间牢房一目了然。监狱长对于数的奇偶性有着一些古怪的迷信想法，他想把这十名囚徒的牢房重新安排一下，以尽可能多地形成偶数排——即在水平方向、竖直方向或与对角线平行的方向上成一排的牢房，其中一共关押着偶数个囚徒。可以看到，目前的情况正如箭头所指示的，只有十二个偶数排，每排 2 人或 4 人。我立刻就会说，这样的偶数排最多可以有十六个。但是这位监狱长只允许有四个人可以转移到其他牢房，而且告诉我，右下角坐着的那个人年迈体弱，不能被转移。好，在这样的条件下，我们怎样来形成这十六个偶数排呢？

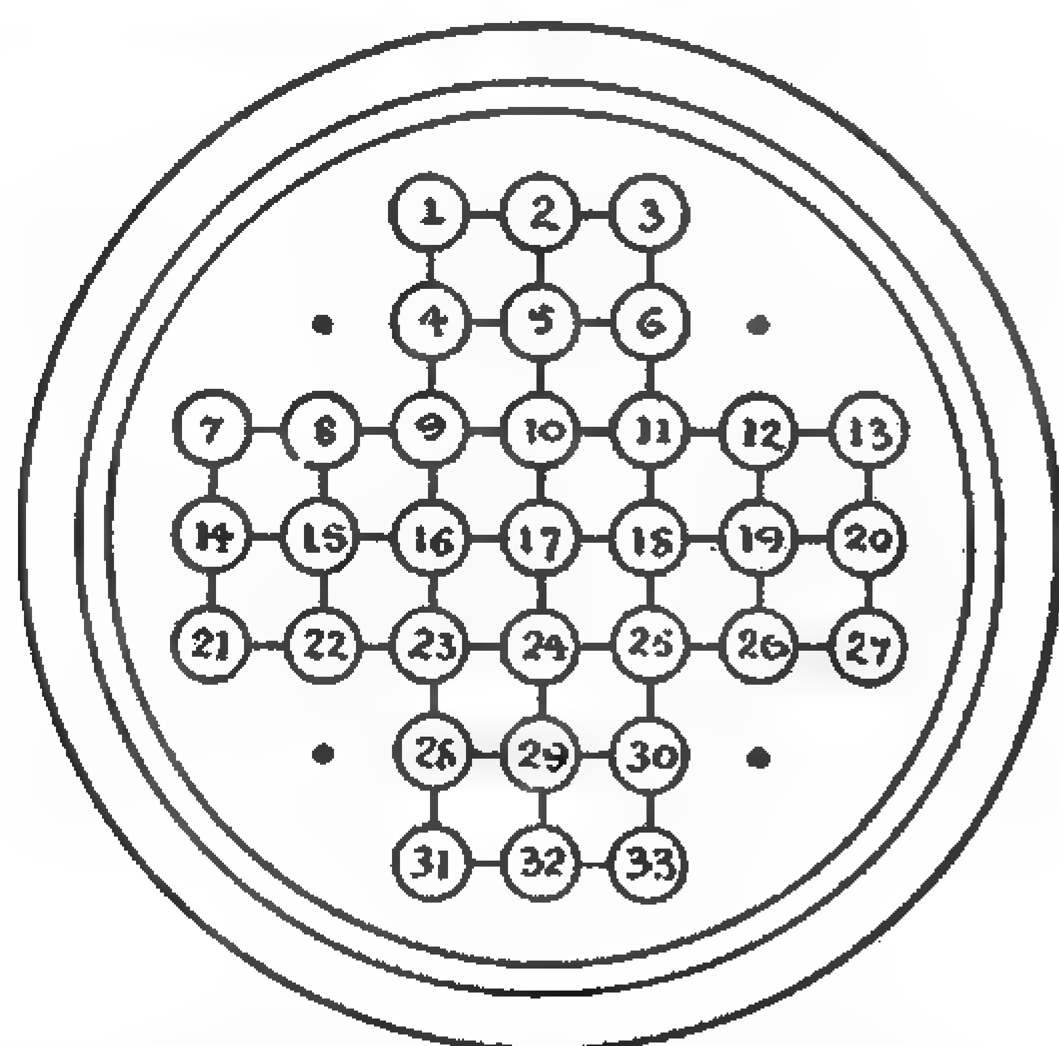
226 绕岸而行

这里的一道趣题，我想你会发现它既有娱乐性又有启发性。我们有一个由八个圆圈构成的环。要求我们将英国的一



个七字母港口名称以下述方式写入这个环,但让圆圈 8 空着。用你的铅笔点触一个空圆圈,然后朝着两个方向中的随便哪一个围绕这个环跳过两个圆圈,写下第一个字母。接下来点触另一个空圆圈,跳过两个圆圈,写下你的第二个字母。按顺序对其他字母进行同样的操作,直到你让这个词完整地出现在环中。例如,假定我们选了 Glasgow(格拉斯哥),于是如下操作:6—1,7—2,8—3,7—4,8—5。这意思是,我们点触6,跳过7 和8,在1中写下 G;然后点触7,跳过8 和1,在2 中写下 l;等等。你会发现,当我们如上写下前五个字母——Glasg 之后,我们就再也不能继续下去了。要么是 Glasgow 有什么不对的地方,要么就是我们的跳跃进行得不恰当。你能揭示这个谜底吗?

227 中央独粒钻石棋



这种古老的游戏很受我们祖母一辈的喜欢,而且我猜想,我们中的大多数人有时候会偶然见到一张“独粒钻石”棋盘

——一张光洁的圆形棋盘，上面挖了一些小孔，组成一个几何图案，每个小孔中都有一粒玻璃弹子。有时候我在一间近郊风格的前客厅里注意到它放在一张墙边桌上，或者在一间农舍里发现它搁在一个架子上，或者在一家路边客栈里看到它被人随身带着。有时候它们是如上图所示的形式，但是另一种形式同样常见：棋盘上还有四个小孔，就在图中用点所示的位置上。我选择那种较简单的形式。

虽然“独粒钻石”棋盘在玩具商店仍然有售，但如果读者将上图放大复制在一张纸板或纸上，将那些“小孔”编号，并给自己弄来33枚筹码(33粒纽扣或33颗蚕豆)，这些就足够能玩这个游戏了。现在，在每个小孔里放一枚筹码，但中央的那个第17号小孔除外。这道趣题要求你通过一系列跳跃，将筹码一枚枚取走，最后只留下一枚筹码，而且它必须位于中央的那个小孔。你可以将一枚筹码跳过一枚相邻的筹码来到其另一侧空着的小孔，就像走国际跳棋那样，被跳过的筹码被立即从棋盘上取走。唯一要记住的是：每一步都必须是一个跳跃；于是你每跳一步就取走一枚筹码，当然，用三十一步单跳就能将三十一枚筹码全都取走。但是这里允许连跳(还是像走国际跳棋那样)，于是步数可以大大减小，因为只要是一枚筹码在接连地跳跃，其中所有的跳跃总共只算一步。

这里设想一个解答的开头几步，它们将把这种棋的走棋规则表现得明明白白，并且给解答者显示了应该怎样把他的每一步尝试写下来：5—17，12—10，26—12，24—26，(13—11，11—25)，9—11，(26—24，24—10，10—12)，等等，等等。被包含在一对括号里的跳跃算作一步，因为它们是由同一枚筹码进行的。请求出最小的步数。当然，对角线方向的跳跃是不允许的；你只能沿着纵横方向的直线跳。

228 十只苹果

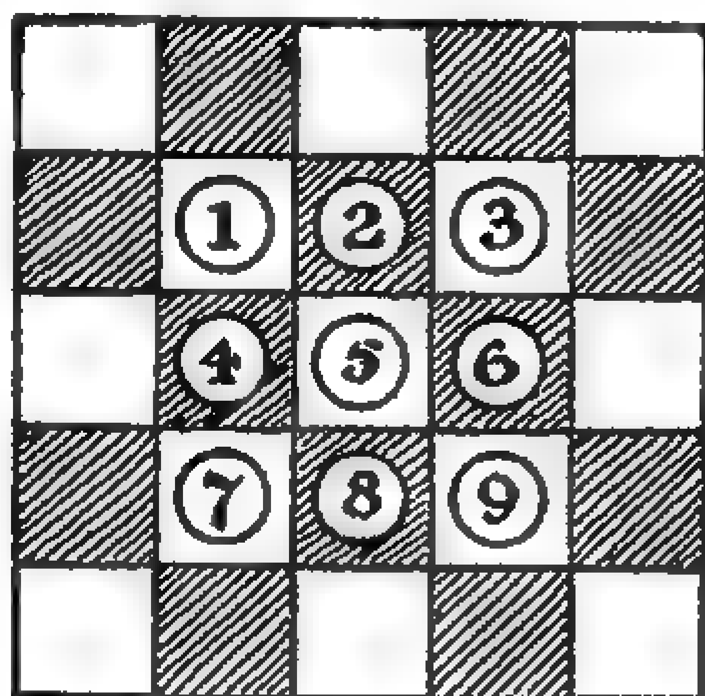


图中这一家子正在用这道小小的趣题自娱自乐，这道趣题并不是很难，但很有趣。可以看到，他们在桌子上用十六个盆子组成了一个方阵，并在其中的十个盆子中各放了一只苹果。他们想找出一种方法，像走国际跳棋那样（即每次跳过一只苹果，放到与其在另一侧相邻的空盆子中），把苹果一只一只地取走，最后只剩下一只；或者更确切地说，是像走独粒钻石棋那样，因为不允许你沿对角线方向走——只能沿这个方阵的行和列走。很显然，按苹果目前的位置，你一步也不能走，但是允许你在开始前把随便哪一只苹果移到一个空盆子里。接下来所有的步骤都必须是跳跃，被跳过的苹果即被取走。

229 九颗杏仁

“这里是一道小趣题，”一位堂区长说，“我发觉它特别迷人。它很简单，但让你感兴趣的时间不知有多长呢。”

这位教士先生取出一张纸，把它划分成二十五个方格，就像一张国际象棋棋盘的一个正方形部分。然后他把九颗杏仁放在中央那些方格中，如图所示，图中我们用编了号的筹码代替杏仁，这样在给出解答时就比较方便。

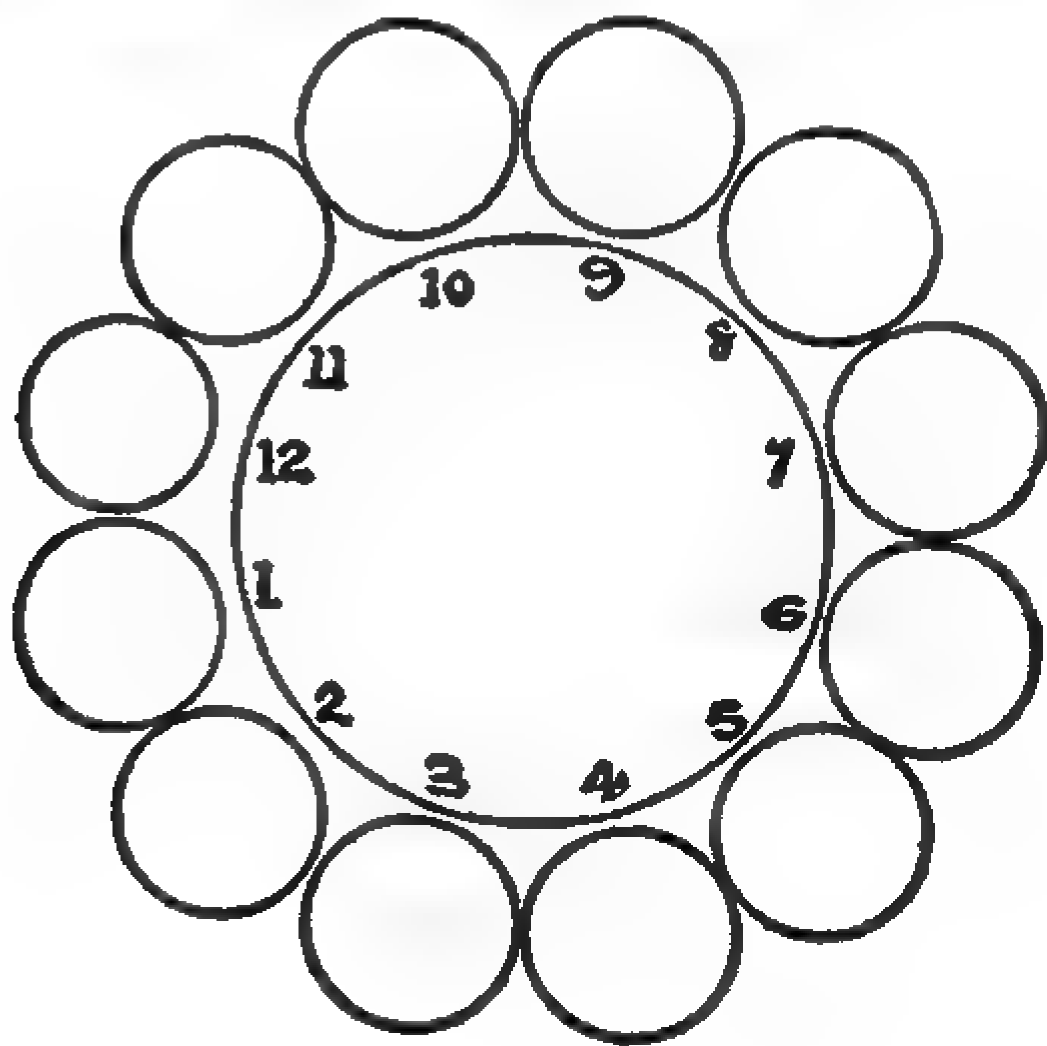


“好，这道趣题就是，”堂区长继续说，“要求取走八颗杏仁，而把第九颗留在那个中心方格中。取走杏仁的方法是：将一颗杏仁跳过另一颗杏仁，跳到其另一侧的空格中，把被跳过的杏仁取走。这就像走国际跳棋那样，只是在这里我们可以沿任何方向跳，而不仅仅是沿对角线方向。问题是要用最少的步骤做成这件事。”

下面的示范性尝试，使一切都变得很清楚：将 4 跳过 1，将 5 跳过 9，将 3 跳过 6，将 5 跳过 3，将 7 跳过 5 和 2，将 4 跳过 7，将 8 跳过 4。但是 8 并没有留在中心方格，其实本来也就是这么回事。记住把那些你跳过的杏仁取走。由同一颗杏仁所作的连续跳跃，不管跳多少次，都算作一步。

230 十二枚便士

这里是一道绝妙的小趣题，它只需要十二枚便士或筹码。把它们排成一个圆圈，如图所示。现在每次拿起一枚便士，越过两枚便士，把它放到第三枚便士上。然后拿起另一枚便士，做同样的事情，如此等等，直到你通过六次这样的移动，把这些硬币叠成六对，分别在位置1、2、3、4、5、6上。你每次都可以朝着两个方向中的随便哪一个围绕这个圆圈移动便士，而且不管那两枚被越过的便士是分离的还是叠成对的，都没有关系。如果你稍稍动一下脑子，这道题便会很容易。



231 盘子与硬币

在一张圆桌上放了十二只盘子，每只盘子里有一枚硬币或者一只橘子，如下页插图所示。你可以随便从哪一只盘子开始，拿起一枚硬币，总是朝一个方向，围绕着圆桌越过另外的两枚硬币，把它放到接下来的一只盘子里。继续向前，拿起另一枚硬币，越过两枚硬币，把它放到一只盘子里；如此不断地进行着



你的圆桌周游。只可以移动六枚硬币，而且当它们都放停当后，应该有六只盘子，其中每只盘子各有两枚硬币，还有六只盘子则空着。这道趣题的关键之处在于：围绕圆桌所转的圈数要尽可能地小。被越过的两枚硬币是同在一只盘子里还是分在两只盘子里，没有关系。不管你将一枚硬币越过多少只空盘子，也没有关系。但是你必须总是朝着一个方向围绕圆桌行进，而且最后要结束于你的出发点。也就是说，你的手要坚定不移地沿着一个方向转圈子，决不反转。

232 抓老鼠

“请公平竞争！”老鼠们说，“你知道这游戏的规则。”

“是啊，我知道规则，”猫儿说，“我得朝着你们所看的方向一圈一圈地转着数，每次数到第十三只老鼠就吃掉它[①]，但我必须把那只白老鼠当作水果留到最后吃。十三是个倒霉的数，但我会尽力让你们满意的。”

---

① 即从某只老鼠开始数，数到第13只便吃掉，然后从下一只老鼠开始数，数到第13只又吃掉，如此进行下去。——译者注



“那么就赶紧吧!”老鼠们喊道。

“让人有时间考虑考虑嘛,”猫儿说,“我不知道该从你们中哪个开始数。我得把它想明白。”

这猫儿想着想着就睡着了,于是魔咒被解除了,老鼠们安全地回到了自己的窝。要使得白老鼠是最后被吃掉的,这猫儿应该从哪只老鼠开始数?

读者解决了这道小趣题后,这里还有第二道趣题要做。如果这猫儿必须从白老鼠开始数(即把它数作1),而且最后吃掉的仍然得是这只白老鼠,那么猫儿一圈一圈转着数时可以数到的最小数是什么[①]?

第三道趣题是:如果这猫儿必须从白老鼠开始数(即把它数作“一”),并使得这只白老鼠是第三个被吃掉的,试求出猫儿一圈一圈转着数时可以数到的最小数。

---

① 这里的意思是:设猫儿从白老鼠开始数,每次数到第 x 只老鼠就吃掉它,结果这只白老鼠最后被吃掉,那么这样的 x 最小是什么?——译者注

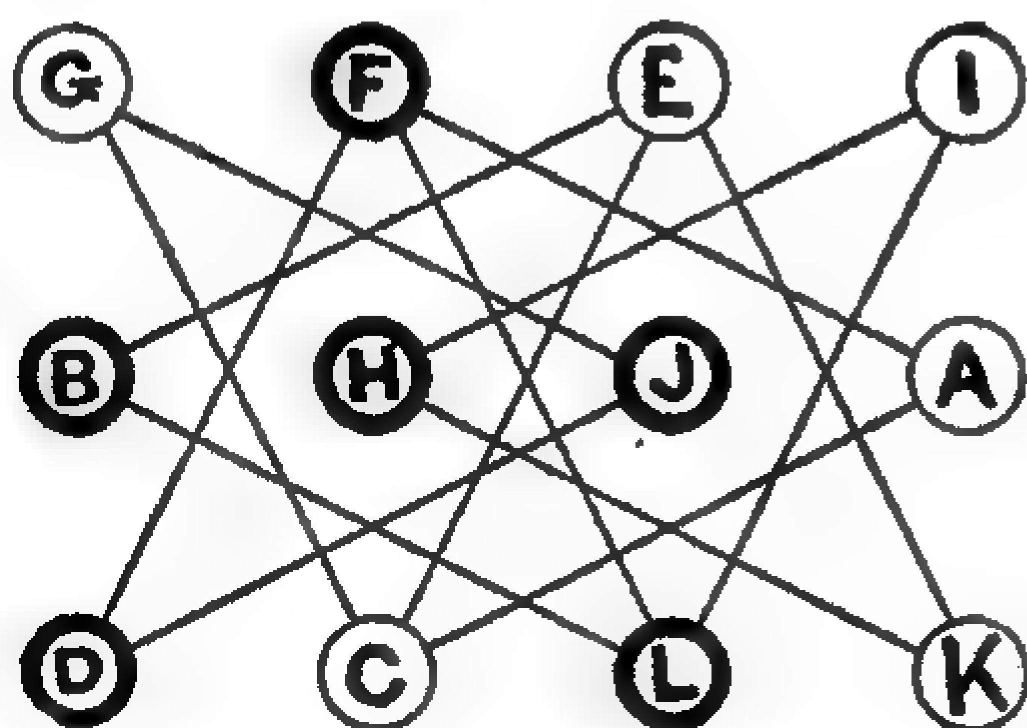
233 古怪的干酪商



图中的这位干酪商是个不可救药的趣题爱好者。他喜爱做的事情之一,就是在他的仓库里堆干酪,他发觉这是个既能锻炼身体又能提高智力的娱乐活动。他把十六块干酪放在地板上排成一行,然后通过将一块干酪越过四块放到另一处的方法,把这些干酪堆成四叠,每叠四块。如果你用十六枚筹码,并把它们从 1 到 16 按序编号,那么你可以将 1 号干酪放到 6 号干酪上面,将 11 号干酪放到 1 号干酪上面,将 7 号干酪放到 4 号干酪上面,如此等等,直到每叠都是四块干酪。可以看到,不管

那被越过的四块干酪是独立的还是成叠的，都没有关系，它们同样作数；而且你每次都可以沿两个方向中的随便哪个方向搬动干酪。用十二步完成这件事的方法有许许多多，因此再要求你设法使堆成的四叠干酪处在各种事先规定的位置，这才形成了一个"耐玩的"好游戏[①]。例如，请你设法使这四叠干酪处在一行的两端，即第1、2、15、16号位置。这很简单，那么请你设法使其中三叠靠在一起，并处于第13、14、15号位置。然后再请你设法使它们处于第3、5、12、14号位置。

234 关于换位的趣题



这儿是一道小小的筹码移动趣题，很是引人入胜。你只要有十二枚筹码——其中六枚是一种颜色，标为A、C、E、G、I、K，另外六枚是另一颜色，标为B、D、F、H、J、L。你先把它们按插图所示放在这幅线条图上，这道趣题要求你把它们按正常的字母序排列，如下所示：

---

① 原文是 a good game of "patience"，其中对 patience 加了引号，而此词又可解作"单人游戏"，因此这里可能是双关。——译者注

A　B　C　D

E　F　G　H

I　J　K　L

完成这件事的每一个步骤都是将同一条直线上的两枚不同颜色的筹码对换。例如，G 和 J 可以对换，F 和 A 也可以，但是你不能将 G 和 C 对换，也不能将 F 和 D 对换，因为前者都是白色筹码，而后者都是黑色筹码。你能不能通过十七次对换就达到所要求的排列？对换次数再少是不可能做成这件事的。如果解法得当，这道趣题其实要比它看上去的那样容易得多。

235 鱼雷实弹演习

一支由十六艘军舰组成的舰队停泊在那里，四周已被敌方包围。假定敌方发射的每一枚鱼雷都是沿直线行进，而且要从三艘舰船底下穿过，才能将第四艘击沉，那么会有多少艘军舰被击沉？在这幅示意图中，我们把这支舰队布成正方形的阵式，



可以看出，其中会有多达七艘的舰船（即在第一行和第一列的那些）被所发射的鱼雷（图中用箭头表示）击沉。如果可以按我们的意愿停泊这支舰队，那么这个数目可以增加到多少？记住，击沉一艘，发射一枚，即击沉了一艘军舰，才可发射下一枚鱼雷；而且每枚鱼雷的行进方向要各不相同。否则，将这些舰船排成一直线，我们击沉的军视就可多达十三艘！这是一项有趣的海战小研究，而且具有明显的实战意义——假定敌方允许你把他们的舰队随意摆布，并答应乖乖地呆在那儿，束手待毙！

236 帽子趣题



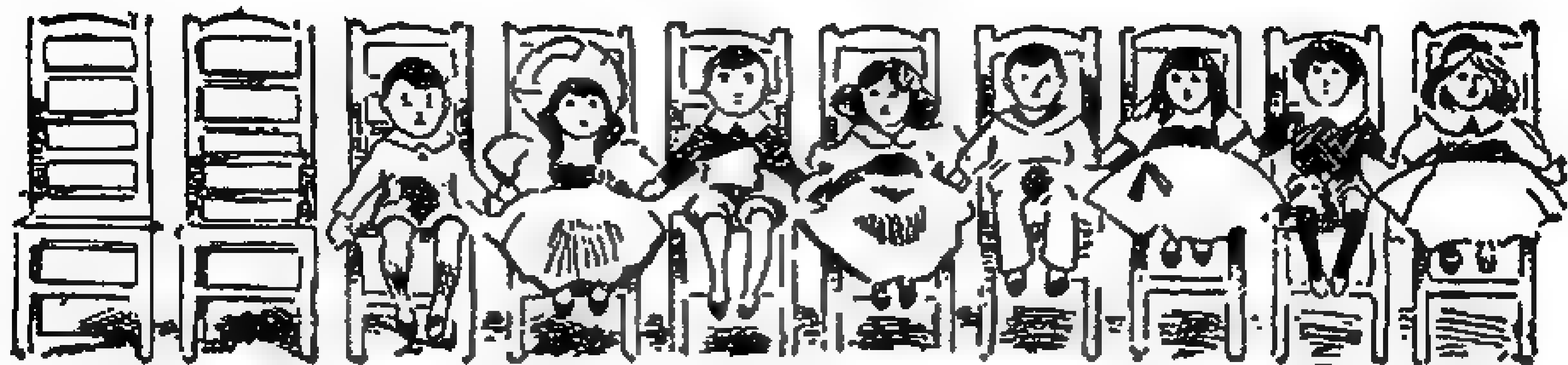
如图所示，十顶帽子挂在挂钩上——其中五顶是缎面礼帽，五顶是毛毡料的“圆顶帽”，两种帽子交错排列。在这排帽子的顶头，有两个挂钩空着。

这道趣题是要你将两顶相邻的帽子移到空挂钩上，然后将另外两顶相邻的帽子移到现在空下来的挂钩上，如此等等，一共移动五对帽子，使得这些帽子再次挂成中间没有空档的一排，但是所有的缎面帽要靠在一起，所有的毛毡帽也要靠在一起。

记住，被移动的两顶帽子必须都是相邻的，你必须一只手拿一顶，在挂到另外的挂钩上时，它们的相对位置不能颠倒。不允许你双手交叉，也不允许你一顶一顶地挂。

这是一道老趣题了，我把它作为下一道趣题的先导在这里给出。你能解决它吗？用两种颜色的筹码或硬币来试着把它解决，并记住，挂成后那两个空挂钩必须在这排帽子的一头。

237 男孩与女孩

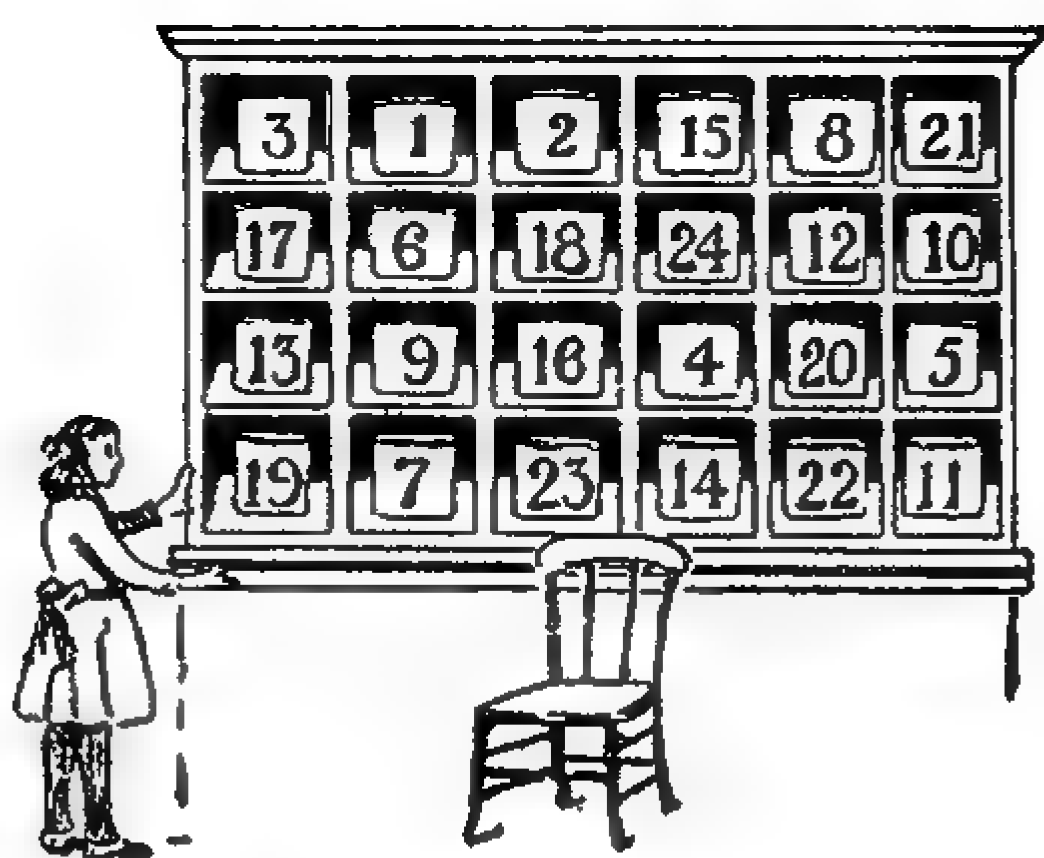


如果你在一张纸上分隔出十个分区，代表椅子，并用八枚编号筹码代表孩子，你就能玩一种迷人的游戏了。让奇数代表男孩，偶数代表女孩，或者你可以用两种颜色的筹码或硬币。

这道趣题是要你抱起两个坐在相邻椅子上的孩子，把他们放到两张空椅子上，**但先要让他们“换边”**；接着从两张相邻的椅子上抱起第二对孩子，把他们放到两张现在空着的椅子上，也是要让他们“换边”；如此等等，直到所有的男孩坐在一起，所有的女孩也坐在一起，而且两张空椅子仍在一头，就像现在这样。你必须用五步做成这件事，才算解决了这道趣题。两个孩子必须总是取自互相邻接的椅子；并且牢记要让这两个孩子“换边”这件重要的事，因为这是这道趣题的与众不同之处。所谓“换边”，我的意思只不过是：举例来说，假定你首先把1号和2号孩子移到空椅子上，那么第一张椅子（即外侧的那张椅子）给2号坐，第二张椅子给1号坐。

238 整理果酱罐

我有一次偶然看到一位小姑娘正在为她的妈妈对碗橱里的一些果酱进行分类。她把不同类的果酱分开，放到搁板上。我注意到她一手拿起一罐布拉斯李子酱，另一手拿起一罐醋栗酱，把它们的位置对换了一下；然后她又将一罐草莓酱与一



罐紫莓酱对换，如此等等。看着她做了许多根本不需要做的对换，从而给自己添了那么多不必要的麻烦，真是有趣。于是我想到应该把这件事编入一道好趣题。

从插图中可以看到，小多萝西必须对付这二十四个橱格中的二十四个大果酱罐。她想把它们按正常的数字顺序排列——也就是说，1 号、2 号、3 号、4 号、5 号、6 号放在最上面一层搁架上，7 号、8 号、9 号、10 号、11 号、12 号放在第二层搁架上，如此等等。好，如果她总是右手拿一罐左手拿另一罐，再把它们的位置对换一下，那么对于把所有这些罐子按正常顺序排列来说，这些对换中有多少个将是必需的呢？她首先自然会把 1 号与 3 号对换，然后 2 号与 3 号对换，这样她就让前三个罐子各就各位了。对于她应该怎样继续下去，你会向她提出什么建议？在一张纸上划出方格，以代表那些橱格，将一些编号筹码摆放在上面，你会发现这是一道很好玩的趣题。

1. 邮局里的困惑

这位年轻的小姐提供了5枚两便士邮票、30枚一便士邮票和8枚两便士半邮票。这一方案正好满足条件，而且总价是五先令。

2. 并不成熟的早熟

香蕉的价格一定是每根一便士一法寻。这样，960根香蕉的价钱是5英镑，而480枚六便士硬币可买2304根香蕉。

3. 在牲口市场上

杰克斯一定是带了7头牲口到市场来，霍奇一定带了11头，而达兰特一定带了21头。这样一共就有39头牲口。

4. 关于远足的趣题

鞋匠们花了35先令，裁缝们也花了35先令，制帽匠们花了42先令，而手套匠们花了21先令。这样，他们总共花了6英镑13先令。而且可以发现，五个鞋匠的花费相当于四个裁缝的花费，十二个裁缝的花费相当于九个制帽匠的花费，六个制帽匠的花费相当于八个制手套匠的花费。

5. 奇怪的巧合

这类趣题在老书上一般是用单调乏味的"倒推法"解决的。但是有如下这样一个简单的一般性解答：如果有 n 个人玩游戏，那么在游戏结束时每人拥有的金额将是 $m(2^n)$，最后一局的赢家一开始一定拥有金额 $m(n+1)$，倒数第二局的赢家一定拥有 $m(2n+1)$，倒数第三局的赢家则是 $m(4n+1)$，接下来是 $m(8n$

+1），依此类推，直到第一局的赢家，他一定拥有 $m(2^{n-1}n+1)$。

这样，在我们这个情况中，$n=7$，游戏结束时每人拥有的金额是 2^7 法寻。因此 $m=1$，从而格杰恩一开始有 8 法寻，弗朗西斯 15 法寻，爱德华 29 法寻，多布森 57 法寻，卡特 113 法寻，贝克 225 法寻，亚当斯 449 法寻。

6. 一笔慈善遗赠

这笔钱可以用七种不同的样式进行布施：5 个女人和 19 个男人，10 个女人和 16 个男人，15 个女人和 13 个男人，20 个女人和 10 个男人，25 个女人和 7 个男人，30 个女人和 4 个男人，35 个女人和 1 个男人。但最后一种情况不能算进，因为条件是“给男人们”，而单单一个男人不是男人们。因此答案是六年。

7. 寡妇应得的遗产

这位寡妇分得的遗产一定是 205 英镑 2 先令 6 便士再加上一便士的 $\frac{10}{13}$。

8. 一视同仁的施舍

这位绅士开始回家时口袋里一定有 3 先令 6 便士。

9. 两架飞机

这个人买进这两架飞机时一定是分别付了 500 英镑和 750 英镑，一共 1250 英镑；但是由于他把它们只卖了 1200 英镑，因此这笔买卖他亏了 50 英镑。

10. 买礼物

乔金斯口袋里最初有 19 英镑 18 先令，后来花掉了 9 英镑 19

先令。

11. 自行车手的盛宴

一起大吃大喝的一共有十名自行车手。他们应该每人付 8 先令;然而,由于其中两人溜之大吉,余下的八人每人要付 10 先令。

12. 关于钱币的一件怪事

答案如下:44 444 英镑 4 先令 4 便士 = 28①,而且化成便士后,10 666 612 = 28。

这里有一个稀奇的小巧合:答案 10 666 612 中,那四个位于中间的数码表示了仅有的另一个答案,66 英镑 6 先令 6 便士。

13. 一道新的钱币趣题

能用英镑、先令、便士、法寻实际支付的,而且用英镑、先令、便士正常表示时用到从 1 到 9 这九个数码各一次且仅一次的最小金额,是 2567 英镑 18 先令 $9\frac{3}{4}$ 便士。

14. 钱的平方

答案是 $1\frac{1}{2}$ 便士和 3 便士。加起来是 $4\frac{1}{2}$ 便士,而 $1\frac{1}{2}$ 便士乘以 3 也是 $4\frac{1}{2}$ 便士。

---

① 这里的等号表示把各位数码加起来得到的结果,下面的那个等号亦是如此。——译者注

15. 口袋里的钱币

最大的合适金额是15先令9便士，由这些硬币组成：克朗一枚和半克朗一枚（或半克朗三枚）、弗罗林四枚，以及三便士一枚。

16. 百万富翁的困惑

这道趣题很容易，当然，它的答案可以通过尝试的方法毫无困难地得到。也就是说，从一百万美元中减去其中所包含的7的最大幂，然后在余下的部分中减去次大的幂，如此等等。不过，这道小题目是用来说明一种简单的直接方法的。把1 000 000转换成七进位制，马上就能给出题目的答案，而关于进位制记数法这个主题，我打算写一些话，以让那些在这方面从未有过充分考虑的人们有所裨益。

我们记数的方法是一种被完美化了的算术速记法，是一种设计得使我们能尽量既迅速又正确地用符号对数进行操作的系统方法。如果我们写下2341这个数，以代表两千三百四十一美元，那么我们在其中想要包含的意思是：1美元，加上10美元的四倍，加上100美元的三倍，加上1000美元的两倍。从右端的个位数开始，左边的每个数码都被认为是代表10的某次幂的一个倍数，至于是10的多少次幂，则由这个数码所在的位置指明。同时为避免混淆，在必要时得插进一个零(0)，因为我们如果用27来代替207，那显然会导致误解。这样，我们就只需要十个数码，因为一个数一旦超过9，我们就在左边放上第二个数码，而一旦超过99，我们就在左边再放上第三个数码，如此等等。我们将看到，这纯粹是一种武断的方法。它以十进位制记数法出现，是因为这个系统方法无疑来自这样一个事实：我们那些发明它的祖

先们都习惯于用他们所具有的十根手指来计数，就像我们现在的孩子那样。对我们来说，通常没有必要声明我们是在使用十进位制，因为这在日常生活事务中一直是公认的。

但是，如果一个人说他有着用七进位制记数法表示的6553美元，你会发现这笔金额同我们通常用十进位制表示的2341美元完全是一回事。他没有用10的幂，而是用7的幂，这样他就永远也不需要任何大于6的数码，而6553事实上代表（在通常的记数法下）：3加上7的五倍，加上49的五倍，加上343的六倍，即2341。要把这个操作逆转过来，或者说要把2341从十进位制转换成七进位制，我们把它除以7，得到334以及余数3；再把334除以7，得到47和余数5；如此不断地除以7，只要有东西可除。把余数按倒过来的顺序读出来，6、5、5、3，就给了我们答案，6553。

好了，就像我说过的，只要把1 000 000美元转换成七进位制，我们的趣题马上就可以解决。不断地用7去除这个数，直到没有什么东西留下来让你除，而你将发现，把余数排列起来是11 333 311，这就是1 000 000的七进位制表示。因此，1美元的馈赠1份，7美元的馈赠1份，49美元的馈赠3份，343美元的馈赠3份，2401美元的馈赠3份，16 807美元的馈赠3份，117 649美元的馈赠1份，以及823 543美元的馈赠（真是一份厚礼）1份，这就圆满地解决了我们的问题。而且这是唯一合适的答案。于是我们看到，没有必要进行什么“尝试”，通过转换成七进位制，我们直接得到了答案。

17. 伤脑筋的储蓄盒

这道趣题的正确答案如下：约翰在他的储蓄盒里放的是双弗罗林两枚（8先令），威廉放的是半沙弗林一枚和弗罗林一枚

(共 12 先令),查尔斯放的是克朗一枚(5 先令),而托马斯放的则是沙弗林一枚(20 先令)。一共是六枚硬币,总面值 45 先令。如果约翰再有 2 先令,威廉少了 2 先令,查尔斯把自己实际拥有的钱翻一番,而托马斯减半,他们每个人就都正好有 10 先令了。

18. 女售货员

每笔生意收到的钱都是 105 法寻。于是女售货员最多是八个,这是因为她们卖出的商品只能是以下面这几种价格:每磅 1 法寻(卖出 105 磅),每磅 3 法寻(卖出 35 法寻),每磅 5 法寻(卖出 21 磅),每磅 7 法寻(卖出 15 磅),每磅 15 法寻(卖出 7 磅),每磅 21 法寻(卖出 5 磅),每磅 35 法寻(卖出 3 磅),每磅 105 法寻(卖出 1 磅)。

19. 除夕晚餐

那天晚上出现在咖啡馆的人们必定是由七对情侣、十位单身男士和一位单身女士构成。这样,一共就是二十五人,而且根据所述的消费金额,他们一共花了正好 5 英镑。

20. 牛肉和香肠

这位女士以每磅 2 先令的价格买了 48 磅牛肉,而以每磅 1 先令 6 便士的价格买了同样重量的香肠,故而花了 8 英镑 8 先令。如果她牛肉买 42 磅而香肠买 56 磅,她就会在每样东西上花 4 英镑 4 先令,而且得到的是 98 磅而不是 96 磅——在重量上多得了 2 磅。

21. 一笔苹果交易

我的那枚一先令先是换得了十六只苹果,这笔交易的价格

是每打九便士。那两只额外的苹果使我的一先令可换十八只苹果，这样，价格就成了每打八便士，或者说比最初的要价每打便宜了一便士。

22. 一笔鸡蛋交易

这个人一定是买了单价五便士的鸡蛋十只，单价一便士的鸡蛋十只，单价半便士的鸡蛋八十只。这样他才能用八先令四便士的价钱买下一百只鸡蛋，而且其中有两种鸡蛋数目相同。

23. 圣诞赏钱

这次分发赏钱发生在“好几年之前”，那时四便士硬币还在流通。一定有十九个人每人得到了十九便士。把这个数额用银币支付，可以有五种不同的方式。我们只要用到这些方式当中的两种。于是，如果有十四个人每人得到四枚四便士硬币和一枚三便士硬币，而有五人每人得到五枚三便士硬币和一枚四便士硬币，那么每人都得到十九便士，而且那将有正好一百枚硬币，总值 1 英镑 10 先令 1 便士。

24. 购物时的困惑

第一位女士购物合计 1 先令 5 便士 3 法寻，第二位女士合计 1 先令 11 便士 2 法寻，她们合起来是 3 先令 5 便士 1 法寻。这三个数额一个都不能用少于六枚的王国流通硬币支付。

25. 中国的钱币

由于一个清钱值两便士又十五分之四个清钱，所以一个清钱那另外的十五分之十一就一定值两便士。于是十一个清钱正好值三十个便士，或者说半个克朗。好了，那次兑换一定是用了

七枚圆孔硬币和一枚方孔硬币。为此我们将看到，由于7枚圆孔硬币值15个清钱的十一分之七，而1枚方孔硬币值16个清钱的十一分之一——也就是说，77枚圆孔等于105个清钱，而11枚方孔等于16个清钱，因此77枚圆孔加上11枚方孔等于121个清钱，也就是说7枚圆孔加上1枚方孔等于11个清钱，或者说与其等值的半克朗。这件事操作起来比这里看上去的样子要简单多了。

26. 初等职员的难题

虽然斯诺格斯希望改为每半年加薪2英镑10先令的理由与我们的趣题无关，但他哄骗他老板付给他比原本要多的薪金这一事实倒是与此有关的。很多读者将惊奇地发现，虽然这五年中莫格斯只拿到了350英镑，但狡猾的斯诺格斯在同样期间实际上拿到了362英镑10先令。余下来的事情就极其容易了。很显然，如果莫格斯存了87英镑10先令，而斯诺克斯存了181英镑5先令，那么后者所存钱占自己薪金的比例就是前者的两倍(具体地说，后者是二分之一，前者是四分之一)，而且这两个数额加起来就是268英镑15先令。

27. 找零钱

帮助这名美国店主摆脱困境的方法是这样的。对于每种硬币，都用它们所代表的美分数目来描述。这样，店主把50和25放在柜台上；顾客放上100、3和2；那陌生人再把他的10、10、5、2和1加上。现在，考虑到所购商品的价钱总共是34美分，很清楚，店主得从这摊钱中拿到109，顾客拿71，而陌生人则拿回他的28美分。因此一眼就可以明白，那枚价值100的硬币必须归店主，于是，价值50的那枚必须归顾客，而价值25的那枚只能归陌生

人。现在,又是一眼就能清楚,那两枚 10 美分的硬币必须归顾客,因为店主现在只要 9,而陌生人只要 3。接下来的事情就很显然了:顾客必须拿那枚 1 美分的,陌生人必须拿那枚 3 美分的,而店主拿 5、2 和 2。总而言之,店主拿了 100、5、2 和 2;顾客拿了 50、10、10 和 1;陌生人拿了 25 和 3。你可以看到,这三人没有一人保留了自己原来的哪怕一枚硬币。

28. 熟视无睹

一便士硬币上的发行日期当然与 Britannia(不列颠)字样印在同一面——"反"面。围着一枚一便士硬币可以放上六枚一便士硬币,它们全都平躺在桌子上,而且周围的每一枚都与当中的那枚接触。可以放在一枚半克朗硬币的表面上、没有一枚压在另一枚上或超出这枚半克朗硬币边缘的三便士硬币的数目,是一。再放上一枚三便士硬币,将会超出那枚大硬币的边缘。猜三枚以下的人几乎没有,而许多人则给出了一些大得十分荒唐的数目。

29. 破损的钱币

如果说这三枚破损的硬币在当初完好时值 253 便士,而现在以它们破损的情况只值 240 便士,那么应该很显然,它们失去了原有价值的$\frac{13}{253}$。由于每枚硬币破损掉的部分占同样的比例,因此每枚硬币都失去了原来体积的$\frac{13}{253}$。

30. 两个概率问题

同时抛掷五枚便士,那么很显然,这些硬币落下后可能有

32 种不同的样式,这是因为第一枚硬币落下后可以呈现两种样式中的任一种,接下来第二枚硬币落下后也可以呈现两种样式的任一种,如此等等。于是五个 2 乘起来就得到 32。那么,这 32 种样式是怎样的一种组成呢?这里就是:

(a) 5 枚都是正面向上………………………… 1 种样式
(b) 5 枚都是反面朝上 ……………………… 1 种样式
(c) 4 枚正面朝上,1 枚反面朝上 ………… 5 种样式
(d) 4 枚反面朝上,1 枚正面朝上 ………… 5 种样式
(e) 3 枚正面朝上,2 枚反面朝上 ………… 10 种样式
(f) 3 枚反面朝上,2 枚正面朝上 ………… 10 种样式

现在可以看到,符合愿望的情况只是(a)、(b)、(c) 和(d)—— 一共 12 种情况。余下的 20 种情况都不符合愿望,因为它们都没有做到至少四枚正面朝上或至少四枚反面朝上。于是,对你来说,符合愿望与不符合愿望之比只有 12 比 20,或者说(这是一回事)3 比 5。换句话说,你的机会只是 8 次中的 3 次。

从放有三枚沙弗林和一枚一先令的袋子里摸一次彩,应该付的金额是 15 先令 3 便士。许多人会说,由于摸到一枚沙弗林的机会是 4 次中的 3 次,所以应该付上一英镑的四分之三,或者说 15 先令。但是他们忽视了至少会摸到一个先令这样一个事实—— 这里没有空彩。

31. 家庭经济学

如果没有我给的暗示,我的读者们可能会一致断定帕金斯先生的收入准是 1710 英镑。但这是错到家了。帕金斯太太说"我们在房租、地方税和国家税上花了他年收入的三分之一"云云—— 这就是说,他们这两年来在房租等方面花掉了一笔金额,

这笔金额等于他年收入的三分之一。注意，不管怎么样，她并没有说他们每年都花掉这样一笔金额，而是在这两年期间花掉了这笔钱。因此，按照对她的话的这种准确理解，唯一合适的答案是，他的收入是每年 180 英镑。这样，他两年的收入计 360 英镑，这期间花掉的金额中，60 英镑付了房租等费用，90 英镑用于日常开销，20 英镑花在其他方面，在银行里尚有结存 190 英镑，与所述相符。

32. 关于廉价车票的趣题

十九先令九便士可以用 458 908 622 种不同的方式支付。

我不打算给出我的解题方法。任何这样的说明都将占据与其重要性或价值不相称的大量篇幅。如果我能在合理的限度内对一切金钱的支付方式给出一种一般的解答，我会打破惯例挤出地方予以介绍；但是这样的一种解答将会极其复杂和繁琐，我不认为花大力气把它搞出来是值得的。

这里我仅给出一个关于这种解答会包含什么内容的大意。为此我只能说，我发现，仅就那些是三便士倍数的金额来说，如果我们只是使用铜币，那么任何金额都可以用$(n+1)^2$种方式支付，其中 n 总是代表便士的数目。如果允许使用三便士硬币，那么就有$\frac{2n^3+15n^2+33n}{18}+1$种方式。如果也可以使用六便士硬币，那么当金额是六便士的一个倍数时，就有$\frac{n^4+22n^3+159n^2+414n+216}{216}$种方式。当金额不是这样一种倍数时，就把上式中的常数216 改为324。这样，随着我们不断加进其他的硬币，有关公式的复杂程度以一种不断增加的速度而增加着。

不过,我想补上一张有趣的小表格,其中表明了把我们当今流通的硬币兑开的合适方式的种数,我相信它以前从未在书上出现过。

兑开一枚	可以有
法寻	0 种方式
半便士	1 种方式
便士	3 种方式
三便士	16 种方式
六便士	66 种方式
先令	402 种方式
弗罗林	3818 种方式
半克朗	8709 种方式
双弗罗林	60 239 种方式
克朗	166 651 种方式
半沙弗林	6 261 622 种方式
沙弗林	500 291 833 种方式

稍稍有点意外的是,兑开一枚沙弗林居然可以有五亿多种方式。但是我对我这些数据的正确性一点儿也不怀疑。

33. 便士换英镑

(1)13 英镑。(2)23 英镑 19 先令 11 便士。"英镑数大于便士数"这句话排除了诸如2英镑16先令2便士这样的金额,以及所有在 1 英镑以下的金额。

34. 卖食品与卖布料

卖食品杂货的营业员被耽误了半分钟,而卖布料的营业员被耽误了八分半钟(是卖食品杂货的营业员的十七倍),加起来

共是九分钟。现在，卖食品杂货的营业员称糖用了二十四分钟，加上被耽误的半分钟，完成这任务共花了 24 分 30 秒。但卖布料的营业员只需要剪四十七下就能把那匹四十八码长的布分成一码一块！这用去他 15 分 40 秒，把耽误的八分半加上去，得 24 分 10 秒。由此，显然是卖布料的营业员以领先二十秒赢得了比赛。大多数解题者都误认为把那匹布分成四十八块要剪四十八下！

35. 贾金斯的牲口

由于这儿有五群牲口，每群牲口数目相等，所以牲口总数一定能被 5 整除；而由于八名交易商每人买进了相同数目的牲口，所以牲口总数一定能被 8 整除。由此，这个牲口总数一定是 40 的一个倍数。你会发现，40 的倍数中尽可能大的能行得通的数是 120，而这个数目的牲口可以由两种方式组成——1 头牛、23 头猪和 96 头羊，或者 3 头牛、8 头猪和 109 头羊。但这第一种方式被这些牲口是由"一些牛、一些猪和一些羊"组成的这样一句陈述所排除，因为一头牛不是"一些牛"。于是第二种分类是正确的答案。

36. 买苹果

由于男孩子的数目与女孩子一样，显然孩子的个数一定是个偶数，而且，你会有三个不同的答案，除非你仔细而严谨地阅读了这道问题。可以是两个孩子，也可以是六个孩子，或者十四个孩子。在其中第一种情况中，可以有十种不同的买苹果方式。但是题目告诉我们，那位绅士"膝下儿女成群"，而一个男孩和一个女孩不能说"儿女成群"，故这种情况要排除掉。在有十四个孩子的情况中，唯一合适的分配方式是每个孩子都得到一个半便士的苹果。但是题目告诉我们，每个孩子都应该公平地分配

到“一些”苹果，而一只苹果不是“一些苹果”，故这种情况也得排除。于是我们被迫回到我们的另一种情况，它正好符合所有的条件。三个男孩和三个女孩，每人分到1个半便士的苹果和2个三分之一便士的苹果。这3个苹果的价钱是一又六分之一便士，把它乘以六就是七便士。因此，正确的答案是，有六个孩子——三个男孩，三个女孩。

37. 买栗子

解决这道小趣题，我们要特别注意顾客与店主所用词语的确切含义。我重新叙述一下问题，不过这次我加了一两个词语，以使情况清晰一些。加上的词用黑体印出。

“一个人到一家商店里买栗子。他说他要买一便士的栗子，结果他得到了五颗栗子。‘这不够；我应该还有**一颗栗子的** a sixth，’他说道。‘但是我再给你一颗栗子，’店主答道，‘你就多拿 five-**sixths** 了。’好了，说来奇怪，他们俩都没错。顾客用半克朗能买到多少颗栗子？”

答案是半克朗栗子是155颗。用30除这个数，我们就会发现，作为那一便士的交换所得，顾客有权得到$5\frac{1}{6}$颗栗子。因此，当他只拿到五颗栗子时说他还要 a sixth(六分之一)，这没有错。而店主说如果他再给一颗栗子(也就是说，一共六颗栗子)，顾客就多拿一颗栗子的 five-sixths(六分之五)了，也没错。

38. 偷自行车的贼

对这个问题，人们给出了各种各样的荒唐答案，然而，你只要考虑到车店老板的损失不可能超过那自行车手实际所偷的价值，这问题真是十分容易。后者骑车扬长而去，带走的是一辆花

了车店老板十一英镑的自行车，以及那十英镑"找头"，因此他以一张毫无价值的纸为代价，拿走了二十一英镑。这正是车店老板所损失的价值，而兑支票和向朋友借钱这些其他的操作，对这个问题一点儿影响也没有。至于在这辆自行车预期销售利润上的损失，当然不是那种口袋里少钱的直接损失。

39. 关于街头小贩的趣题

比尔买下橘子的价钱一定是每一百个 8 先令 —— 也就是说，10 先令买 125 个。如果价钱是每一百个 8 先令 4 便士，那么他付出 10 先令只能买 120 个橘子。这些都与比尔的说法绝对相符。

40. 妈妈的年龄

妈妈的年龄一定是 29 岁 2 个月；爸爸的年龄，35 岁；而那个孩子的年龄，5 岁 10 个月。把它们加起来，就是七十岁。父亲的年龄是儿子的六倍，而且，过了 23 年又 4 个月之后，他们的年龄之和将达到 140 岁，而汤米的年龄将是他父亲的一半。

41. 他们的年龄

那位绅士的年龄一定是 54 岁，而他妻子的年龄是 45 岁。

42. 子女们的年龄

这些孩子们的年龄如下：比利，$3\frac{1}{2}$ 岁；格特鲁德，$1\frac{3}{4}$ 岁；亨里埃塔，$5\frac{1}{4}$ 岁；查利，$10\frac{1}{2}$ 岁；珍妮特，21 岁。

43. 廷普金太太的年龄

一对夫妻，如果在结婚时其中年长者的年龄是年轻者的三

倍，那么年轻者结婚时的年龄总是同从结婚到年长者年龄成为她年龄两倍时所经过的年数一样。在我们的情况中，后来是经过了十八年，因此廷普金太太在结婚那天的年龄是十八岁，而她丈夫那时五十四岁。

44. 关于人口普查的趣题

埃达·乔金斯小姐一定是二十四岁，而她的小弟弟约翰尼三岁，其余十三位兄弟姐妹的年龄介于他们之间。在“比小约翰尼大七倍”这句话中对解题者设了个陷阱。“大七倍”当然等于“是八倍”。令人惊奇的是，急匆匆以为这与“是七倍”是一回事的人竟有这么多。一些杰出的作家犯过这个错误。很可能我的许多读者认为 $24\frac{1}{2}$ 岁和 $3\frac{1}{2}$ 岁是对的。

45. 母亲与女儿

再过四年半，当女儿长到十六岁半，而母亲是四十九岁半的时候。

46. 玛丽与马默杜克

马默杜克的年龄一定是二十九又五分之二岁，而玛丽是十九又五分之三岁。当马默杜克的年龄是十九又五分之三岁的时候，玛丽只有九又五分之四岁，因此那时马默杜克的年龄是她的两倍。

47. 罗弗的年龄

罗弗现在的年龄是十岁，而米尔德里德是三十岁。五年前他们的年龄分别是五岁和二十五岁。请回忆我们说的是“年龄比

这条狗大四倍”，这与“年龄是五倍”是一回事（见第44题答案）。

48. 关于汤米的年龄

汤米的年龄一定是九又五分之三岁。安妮的年龄是十六又五分之四岁，母亲的年龄是三十八又五分之二岁，而父亲是五十又五分之二岁。

49. 隔壁邻居

贾普先生39岁，贾普太太34岁，朱莉娅14岁，乔13岁；西姆金先生42岁，西姆金太太40岁，索菲10岁，萨米8岁。

50. 一袋果仁

你会发现，当赫伯特拿十二颗时，罗伯特和克里斯托弗将分别拿九颗和十四颗，这样他们就一共拿三十五颗果仁。由于770中有二十二个35，我们只要把12、9和14乘以22，就能求得赫伯特的份额是264颗，罗伯特是198颗，克里斯托弗是308颗。接下来，由于他们的年龄之和是$17\frac{1}{2}$岁，或者说是12、9与14这三者之和的一半，因此他们的年龄一定分别是6岁、$4\frac{1}{2}$岁和7岁。

51. 玛丽几岁了

玛丽的年龄与安妮的年龄之比一定是5比3。而由于她们的年龄之和为44岁，因此玛丽$27\frac{1}{2}$岁，安妮$16\frac{1}{2}$岁。一位比另一位整整大11岁。我现在要在原来的陈述中用括号插入所提到的

各个年龄。"玛丽的年龄($27\frac{1}{2}$岁)是安妮过去某个时候年龄($13\frac{3}{4}$岁)的两倍,那时玛丽的年龄($24\frac{3}{4}$岁)是安妮将来某个时候年龄($49\frac{1}{2}$岁)的一半,而到将来那个时候,安妮的年龄($49\frac{1}{2}$岁)将是玛丽过去当她年龄($16\frac{1}{2}$岁)是安妮年龄($5\frac{1}{2}$岁)的三倍时的年龄($16\frac{1}{2}$岁)的三倍。"现在进行反向验算。当玛丽的年龄是安妮年龄的三倍时,玛丽$16\frac{1}{2}$岁,安妮$5\frac{1}{2}$岁(小11岁)。接下来我们得到将来当安妮的年龄是玛丽这时年龄的三倍时的年龄$49\frac{1}{2}$岁。当玛丽是这年龄的一半时她是$24\frac{3}{4}$岁。而这时安妮一定是$13\frac{1}{2}$岁(小11岁)。因此玛丽现在是这年龄的两倍——$27\frac{1}{2}$岁,而玛丽小11岁——$16\frac{1}{2}$岁。

52. 奇怪的血缘关系

如果一个男人娶了一个女人,女人死了,于是他娶了他已故妻子的妹妹,而他自己又死了,那么说他(曾经)娶了他遗孀的姐姐,可以说是正确的。

这名青年不是简·布朗的nephew,因为他就是她的儿子。她的姓同他哥哥一样,是因为她嫁了一个与自己同姓的男人[①]。

①西方习俗,妇女结婚后要改姓夫家姓。我国旧时亦有此习俗。——译者注

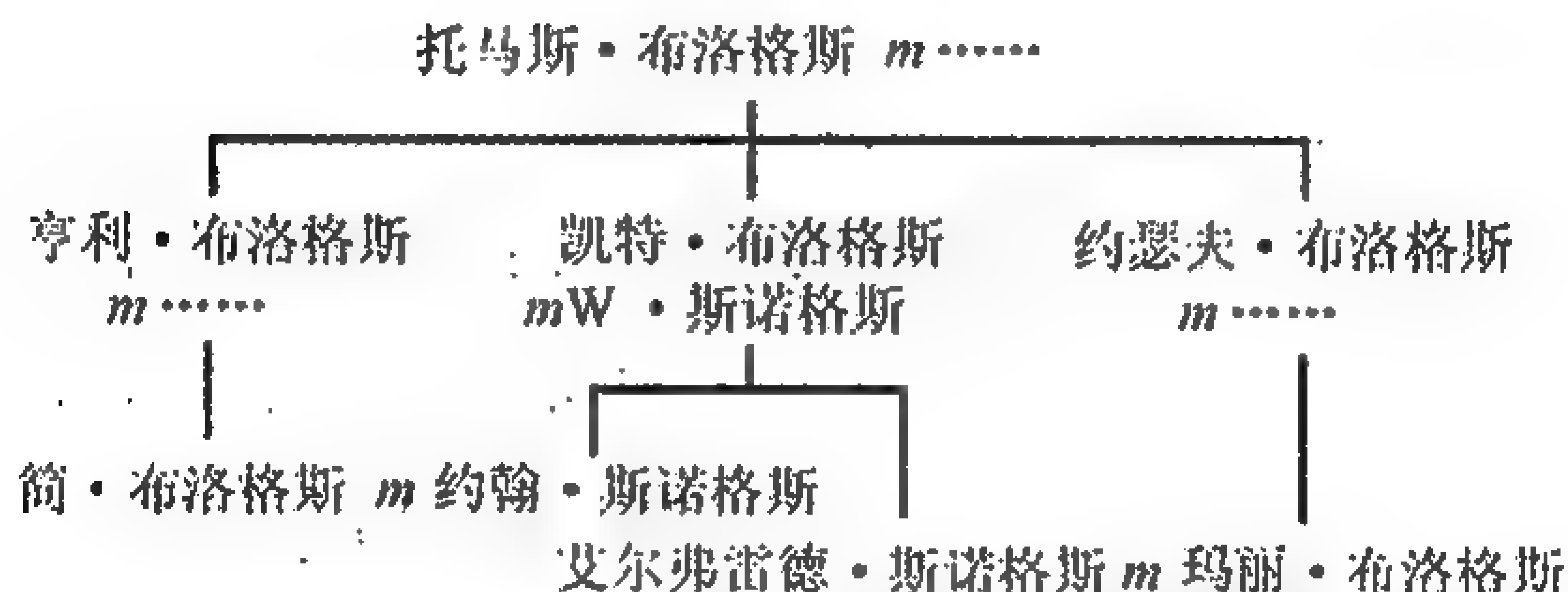
53. 在地铁上听到的

这位绅士是第二位女士的叔叔或伯伯。

54. 一次家庭派对

参加这次派对的人有两个小姑娘和一个小男孩，还有他们的父亲和母亲，以及他们父亲的父亲和母亲。

55. 混合亲戚



字母 m 代表“与……结婚”。我们看到，约翰·斯诺格斯可以对约瑟夫·布洛格斯这样说：“你是我父亲的内弟，因为我父亲娶了你姐姐凯特；你是我弟弟的岳父，因为我弟弟艾尔弗雷德娶了你的女儿玛丽；你是我岳父的弟弟，因为我妻子简是你哥哥亨利的女儿。”

56. 威尔逊的难题

如果有两个男人，各娶了对方的母亲，而且这两个婚姻各产生了一个儿子，那么这两个儿子中的每一个都同时是另一个的叔叔和侄子。还有其他方式可以实现这种亲戚关系，但这种是最简单的。

57. 那时是什么时间

那个时间一定是下午9时36分。从中午到那时的时间的四分之一是2小时24分，从那时到第二天中午的时间的一半是7小时12分。把它们加起来就是9小时36分。。

58. 关于时间的趣题

二十六分钟。

59. 一只伤脑筋的表

如果这65分钟就是在这只表的表面上计得的，那么这道题目不能解：因为指针每走过这表面所表示的65 $\frac{5}{11}$ 分钟，必定重合一次，这同表走快走慢没有关系。但如果这65分钟是用实际时间测得的，那么这表每65分钟快了一分钟的$\frac{5}{11}$，或者说每小时快了一分钟的$\frac{60}{143}$。

60. 沃普肖码头疑案

在十二个小时当中，有十一个不同的时刻让一只钟的时针和分针发生一根正好在另一根上面的情况。如果我们把12小时除以11，我们就得到1小时5分27 $\frac{3}{11}$ 秒，这就是从12时到它们第一次重合所经过的时间，这也是两根指针从一次重合到下一次重合所经过的时间。它们第二次重合是在2时10分54 $\frac{6}{11}$ 秒

（把上面的时间翻倍）；下一次是在3时16分21$\frac{9}{11}$秒；再下一次在4时21分49$\frac{1}{11}$秒。这最后的一个，是唯一的时针分针重合而"秒针刚刚走过49秒处"的时刻。因此，这就是表停下的时刻。盖伊·布思比（Guy Boothby）在他的《为一个妻子横跨世界》（*Across the World for a Wife*）开头句子中写道："这是一个寒冷阴沉的冬天下午，当我壁炉台上那台钟的指针会合在一起，指着4时20分的时候，我寝室里几乎黑暗得像深夜一样。"很显然，作者在这里出了个差错，因为，正如我们上面看到的，他的估算差了1分49$\frac{1}{11}$秒。

61. 交换位置

从下午三时到午夜十二时有三十六对时刻，其中每对时刻的指针表示只是相互交换了一下位置。从任何整时（n）到午夜十二时，这样的时刻对数就是从1开始的$12-(n+1)$个连续自然数之和。在这道趣题的情况下，$n=3$，所以$12-(3+1)=8$，而$1+2+3+4+5+6+7+8=36$，这就是所需要的答案。

第一对这样的时刻是3时21$\frac{57}{143}$分和4时16$\frac{112}{143}$分，而最后一对是10时59$\frac{83}{143}$分和11时54$\frac{138}{143}$分。我将不给出这三十六对时刻中的其余各对，而是提供一个公式，用这个公式，从中午十二时到午夜十二时发生的六十六对这种时刻中的任何一对，都可以立即求得：

$$a\text{时}\frac{720b+60a}{143}\text{分}\quad\text{和}\quad b\text{时}\frac{720a+60b}{143}\text{分。}$$

对于字母 a,可以用从0、1、2、3 直到10 的任何整时数代替(其中0代表中午12时),而 b 则可以代表任何比 a 晚的整时数,最大到11。

利用这个公式,求出第二个问题的答案就一点没有困难了:$a=8$ 和 $b=11$ 将给出8时 $58\frac{106}{143}$ 分和11时 $44\frac{128}{143}$ 分这对时刻,后者是所有这种时刻中分针靠点 Ⅸ 最近的时刻——事实上,只有一分钟的 $\frac{15}{143}$ 这点距离。

把所有这六十六对时钟指针呈互换的时刻制成一张表,读者可以发现这是很有意思的。一种简单的方法如下:设一个列专写一对时刻的第一个时刻,再设第二个列专写第二个时刻。在上述表达式中令 $a=0$ 而 $b=1$,我们求得第一个例子,并在第一列的顶头写入0时 $5\frac{5}{143}$ 分,而在第二列的顶头写入1时 $0\frac{60}{143}$ 分。现在,在第一列中不断地加上 $5\frac{5}{143}$ 分,而在第二列中不断地加上1小时 $0\frac{60}{143}$ 分,我们就得到了所有十一对这样的时刻:其中第一个时刻都是零时过后或者说中午十二时过后再过若干分钟。接下来在时间间隔上有一个"跳跃",但是你可以令 $a=1$ 和 $b=2$ 而得到下一对时刻,然后同前面那样,用不断加上那两个时间间隔的方法,你将得到1时后面的所有十对时刻。接下来又有一个"跳跃",而你通过加法又能得到2时后面的所有九对时刻。如此等等,直到结束。至于这些"跳跃"的性质和起因,我留给读者自己去探究。就这样,我们相继得到了整时数后面的 $11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=66$ 对时刻。这个结果与这篇文章第一段中的公式相符。

有一所文官培训学院的院长，在一家期刊上主持一个“文官专栏”。不久前他收到来信，向他询问：“一台指针长度相同的钟，在Ⅶ时之后再过多久所指示的时间将变得模棱两可？”他的第一个回答是“一时后面的某个时刻”，但是他一期又一期地改变答案。他的一些读者终于使他相信，答案是“在Ⅶ时$5\frac{5}{143}$分”。于是他最后以此为正确答案，但他同时给出的理由竟然是，在那个时刻不管你假设哪根指针是时针，所指示的时间都是一样的！

62. 俱乐部的钟

插图中所示的指针位置只可能表明那钟是在11时44分$51\frac{1143}{1427}$秒的时候停的。秒针下一次将在11时45分$52\frac{496}{1427}$秒的时候“处在另两根指针的正中间”。如果我们是针对这三根指针在圆周上所对的点而言的话，那么答案将是11时45分$22\frac{106}{1427}$秒；但是问题是对指针而言的，而且那时秒针不在另两根指针之间，而是在它们之外。

63. 跑　表

表上所示的时刻是9时$5\frac{5}{11}$分，这时秒针应该指在$27\frac{3}{11}$秒处。指针下一次走到相隔距离与前相同的时刻将是2时$54\frac{6}{11}$分，这时秒针应该指在$32\frac{8}{11}$秒处。但是你只要把这只表（或者把我们前面的插图）拿到一面镜子前，这时你会看到镜子中映出

的正是这个秒数！当然，看镜子中的映像时，你要把 XI 看作 I，把 X 看作 II，等等。

64. 三只钟

仅仅作为一道算术题目，这个问题并没有什么难处。为了让指针同时都指着十二时，B 钟将必须快至少十二小时，而 C 钟将必须慢至少十二小时。因为 B 钟在一天二十四小时中快了一分钟，而 C 钟在完全同样的时间内慢了一分钟，显然一只钟将用 720 天来做到快 720 分钟（就是十二小时），而另一只钟将用 720 天来做到慢 720 分钟。A 钟走时准确，因此这三只钟必定在从 1898 年 4 月 1 日算起的第 720 天的中午都同时指着十二时。这天是一个月中的哪一天呢？

我在 1898 年发布这道小趣题，是为了看看有多少人知道 1900 年并非闰年这个事实。令人意外的是，居然有这么多人在这一点上显得无知。每个能被四除后没有余数的年份都是闰年，但是每一百年都要除去一个闰年。1800 年不是闰年，1900 年也不是。然而，在另一方面，为了让历法与太阳的运行规律更为接近，每四百年还是要考虑一个闰年。于是，2000 年、2400 年、2800 年、3200 年，等等，都将是闰年。或许我的读者们能活到那个时候。因此我们求得，从 1898 年 4 月 1 日中午开始，过 720 天，我们将来到 1900 年 3 月 22 日的中午。

65. 火车站的钟

这时间一定是 2 时 43 $\frac{7}{11}$ 分。

66. 乡下呆子

发生这段对话的那天是星期日。因为当后天(星期二)是“昨天”时,“今天”将是星期三;而当前天(星期五)是“明天”时,“今天”是星期四。星期四与星期日之间,星期日与星期三之间,都是有两天。

67. 平均速度

平均速度是每小时十二英里,而不是像大多数人所急忙宣称的十二英里半。任取一个你喜欢的距离,比方说六十英里。这将需要在去程上花六小时而在回程上花四小时。120 英里的来回路程于是花了十个小时,因此平均速度显然是每小时十二英里。

68. 两列火车

一列火车的运行速度正好是另一列的两倍。

69. 三个村庄

对这三个村庄用它们英文原名的首字母来称呼(称阿克里菲尔德为 A,巴特福德为 B,奇斯伯雷为 C)。显然那三条道路构成了一个三角形 ABC,而且从 C 到底边 AB 的垂线长十二英里。这条垂线把我们的三角形划分成两个直角三角形,它们有一条十二英里长的公共边。于是可以发现,从 A 到 C 的距离是 15 英里,从 C 到 B 的距离是 20 英里,而从 A 到 B 的距离是 25(就是 9 加上 16)英里。这些数字很容易证明,因为 12 的平方加上 9 的平方等于 15 的平方,而 12 的平方加上 16 的平方等于 20 的平方。

70. 领抚恤金

这距离一定是 $6\frac{3}{4}$ 英里。

71. 都铎的埃德温爵士

这个距离一定是六十英里。如果埃德温爵士在中午动身，并以每小时 15 英里的速度骑行，他将在四时到达——早了一个小时。如果他以每小时 10 英里的速度骑行，他将在六时到达——晚了一小时。但是如果他以每小时 12 英里的速度行进，他到达那坏贵族的城堡的时间将正好是五时——这正是指定的时间。

72. 水上飞机问题

这架飞机一定是以每分钟二十四分之七英里的速度飞行，而风速是每分钟二十四分之五英里。这样，飞去时顺风，飞机速度将是每分钟二十四分之十二英里或者说半英里，回来时逆风，速度只有每分钟二十四分之二或者说十二分之一英里。因此，这架飞机在什么风也没有的情况下，既然它能用二十四分钟的时间飞七英里，那么，它将用三十四又七分之二分钟的时间飞完这十英里。

73. 赛　驴

跑完这一英里用了九分钟。根据所述的事实，我们不能确定跑第一个和第二个四分之一英里各用了多少时间，但是它们一共所用的时间显然是四分半钟。最后的两个四分之一英里各用了二又四分之一分钟。

74. 捡马铃薯

把马铃薯的个数、比这个个数少一的数和比这个个数的两倍少一的差乘起来，再除以3。按此，把50、49和99乘起来，得到242 550；再除以3，这就给了我们80 850码这个正确答案。因此，这孩子要跑45英里再加十六分之十五英里——这真是一个工作了一天之后的美妙小游戏。

75. 乘客的车费

汤普金斯先生应该付十五先令，这是他合理承担的汽车费。他只是分享了价值3英镑的运行距离的一半，因此他应该付出三十先令的一半，即十五先令。

76. 一桶啤酒

这六个数的数码根在这里是6、4、1、2、7、9，它们加起来是29，而29的数码根是2。如果一个购买者所买酒的量是另一个购买者的两倍，那么所卖酒桶中的酒的总加仑数必定是一个能被3整除的数，于是我们必须把一个其加仑数的数码根是2、5或8的酒桶找出来放在一旁。只有一个酒桶符合这条件，它装了20加仑的酒。因此这个人一定是把这20加仑啤酒留给自己享用，而把33加仑酒(18加仑和15加仑的两桶)卖给一个人，把66加仑(16、19和31加仑的三桶)卖给了另一个人。

77. 数码与方阵

顶行必定是下列四个数之一：192、219、273、327。其中第一个就是已给出的例子。

78. 奇数码与偶数码

由于我们得把复数、假分数和循环小数排除掉，因此最简单的解答是：$79+5\frac{1}{3}$ 和 $84+\frac{2}{6}$。如果分数一点儿也不用，那么显然是不能解的。

79. 锁柜趣题

最小的和是 356 = 107 + 249，而最大的和是 981 = 235 + 746 或 657 + 324。当中的那个和可以是 720 = 134 + 586，可以是 702 = 134 + 568，也可以是 407 = 138 + 269。这个情况下的和一定是由 0、2、4、7 中的三个数码组成，但是除了这三个给出的外，不可能得出其他的和。因此，在第一个大橱的情况中，我们别无选择；在第三个大橱的情况中，有两种选择；而在中间那个大橱的情况中，可以选择三种排法中的任何一种。这里是一种解答：

$$\begin{array}{r}107\\249\\\hline356\end{array}\qquad\begin{array}{r}134\\586\\\hline720\end{array}\qquad\begin{array}{r}235\\746\\\hline981\end{array}$$

当然，在每种情况中，开头两行的数字可以上下对换，和不会变化。结果，实际上就可以有正好 3072 种不同的样式把数码置于锁柜门上。我必须自鸣得意地展示一个关于这道趣题的小原理。和的数码之和总是被那个剔除不用的数码所支配。

$$\frac{9}{9}-\frac{7}{10}-\frac{5}{11}-\frac{3}{12}-\frac{1}{13}-\frac{8}{14}-\frac{6}{15}-\frac{4}{16}-\frac{2}{17}-\frac{0}{18}$$

这里显示在横线上面的数码，不管是哪一个，如果是剔除不用的，那么相应的和的数码之和就可在同一横线下面找到。例如，在大橱 A 的情况中，我们没有用 8，于是和的数码加起来等

于14。因此，如果我们要得到356，那么我们可以立刻十分有把握地知道，这只能通过舍弃8才能得到（如果能得到的话）。

80. 三组数码

对这道趣题有9个解答，如下所示，再也没有其他的了：

$$12 \times 483 = 5796,$$
$$27 \times 198 = 5346,$$
$$42 \times 138 = 5796,$$
$$39 \times 186 = 7254,$$
$$18 \times 297 = 5346,$$
$$48 \times 159 = 7632,$$
$$28 \times 157 = 4396,$$
$$4 \times 1738 = 6952,$$
$$4 \times 1963 = 7852。$$

其中第七个答案最有可能被这道趣题的解答者所遗漏。

81. 九枚筹码

在这种情况下，不可避免地要仅仅依靠一定数量的“尝试”。但是有两种类型的“尝试”——那些纯粹随意的和那些有条不紊的。真正的趣题爱好者是决不会满足于仅仅的随意性尝试的。读者会发现，只要把23和46中的数码顺序反过来（使得乘数是32和64），两个积就都成为5056了。这是一个改进，但并非正确答案。如果我们让584乘以12，我们就可以得到7008这样大的一个积了，但是这个答案如果不运用一些判断力和具有一定的耐心是不可能找到的。

82. 十枚筹码

正如我指出的那样，把筹码摆放得使它们形成两个简单的乘法直式，每个式子给出的积相等，这是一件十分容易的事——事实上，这件事可以被任何人用一点点耐心在五分钟内完成。但是找出两个算式，一个给出最大的积，一个给出最小的积，那就完全是另一回事了。

现在，为了得出最小的积，必须选择两个尽可能小的数作为乘数。因此，如果我们把1和2作为乘数放上去，那么我们要做的事仅是把余下的八枚筹码摆放成这样一种样子：它们形成两个数，其中一个正好是另一个的两倍；而且在做这件事的时候，我们当然必须努力地使那个较小的数尽可能地小。我们能得到的最小的数显然是3045，但这个数是不行的，3405、3450 等等也不行。可以确定，3485 就是那个尽可能小的数。于是所要求的答案之一是3485 × 2 = 6970 和6970 × 1 = 6970。

然而，这道趣题的另一部分（找出一对具有最大积的算式）是真正棘手的问题，因为断定我们应该让乘数由一个数码组成还是由两个数码组成，根本不是一件容易的事。不过很显然，我们必须尽我们所能地让那些最大的数码呆在乘数和被乘数的右边。你将看到，通过下面的摆放，可以得到 58 560 这样大的一个数。于是，915 × 64 = 58 560 和 732 × 80 = 58 560。

83. 数码乘法

给出尽可能小的公共积数码和的解答是23 × 174 = 58 × 69 = 4002，而给出尽可能大的数码和的解答是9 × 654 = 18 × 327 = 5886。在第一种情况中，各个数码加起来是 6；而在第二种情况中加起来是 27。要得到这些解答，除了切切实实的尝试外，没

有其他的办法。

84. 小丑的趣题

对于这道趣题，只有如下六个不同的解答：

8 乘以 473 等于 3784，

9 乘以 351 等于 3159，

15 乘以 93 等于 1395，

21 乘以 87 等于 1827，

27 乘以 81 等于 2187，

35 乘以 41 等于 1435。

可以看出，在每一种情况中，两个乘数所含有的数码与积的数码完全相同。

85. 出租车号码

我认为，这个最大的积是通过把8 745 231 乘以96 而得到的——具体地说，是 839 542 176。

我在这里将一般化地处理这个问题，其实我在上一道趣题中就已经表明，对于三个数码，只有两个合适的解答，而对于四个数码，只有六个不同的解答。

这些情况已全部给出。对于五个数码，恰有二十二个解答，如下所示：

$3 \times 4128 = 12\ 384$,

$3 \times 4281 = 12\ 843$,

$3 \times 7125 = 21\ 375$,

$3 \times 7251 = 21\ 753$,

$2541 \times 6 = 15\ 246$,

$651 \times 24 = 15\,624$,
$678 \times 42 = 28\,476$,
$246 \times 51 = 12\,546$,
$57 \times 834 = 47\,538$,
$75 \times 231 = 17\,325$,
$624 \times 78 = 48\,672$,
$435 \times 87 = 37\,845$;

$9 \times 7461 = 67\,149$,
$72 \times 936 = 67\,392$;

$2 \times 8714 = 17\,428$,
$2 \times 8741 = 17\,482$,
$65 \times 281 = 18\,265$,
$65 \times 983 = 63\,895$;

$4973 \times 8 = 39\,784$,
$6521 \times 8 = 52\,168$,
$14 \times 926 = 12\,964$,
$86 \times 251 = 21\,586$。

现在,如果我们把每种可能的组合都拿来用乘法检验一下,那么我们将需要做不少于30 240次的尝试,或者,如果我们一上来就把乘数为1的情况剔除,那也要28 560次尝试。我想这是一个大多数人都想逃避的工作。但是,让我们来考虑一下是不是就没有更简短的方式来得到所需要的结果了。我已经解释过,如果你把任何数的各位数码加起来,然后,如果必要,就把加出来的结果的各位数码加起来,你最后一定会得到一个由一个数码构成的数。这最后的一个数我称之为"数码根"。在我们题目的每一个解答中,我们乘数的数码根的和的数码根,必定与它们

的积的数码根相等。这种情况只能以四种方式发生:当这两个乘数的数码根分别为3和6,或者9和9,或者2和2,或者5和8的时候。我已把上面二十二个解答划分成这样的四类。于是很显然,前两类中的任何一个积的数码根一定是9,而后两类中的是4。

由于事实上没有一个五位数[①]会有一个小于15或大于35的数码和,我们发觉,要使我们的积的数码根为9,它的各位数码加起来不是18就是27,要使积的数码根为4,它的数码和不是22就是31。选择五个不同的数码使它们加起来为18的方式有3种,选择五个数码使它们加起来为27的方式有11种,选择五个数码使它们加起来为22的方式有9种,加起来为31的方式有5种。因此,一共有28个不同的数码组,不会再有其他的了,其中任何一组都有可能构成一个积。

接下来我们把这五个一组共28组数码写成一列,并进而把它们可能分解成的因数或者叫乘数列入表中予以考察。粗略地说,现在看来约有2000种可能的情况要试验一下,而不是上面提到的30 240种了。然而,淘汰过程现在开始了,而如果读者有一双敏锐的眼睛和一个清晰的头脑,他就能迅速地排除掉大量的情况,留下相对较少的验算乘法有必要做一下。如果要详细解释我的方法,就要占据太多太多的篇幅,但我将拿我表格中的第一组数码来演示,在每个人做下去时都应该想到的小技巧和小花招的帮助下,这件事是怎样容易地完成的。

我的第一组作为积的五个数码是8、4、3、2、1。这里,我们可以看到,每个因数的数码根必定是3或3的倍数。由于其中没有6或9,所以乘数若是一位数就只能是3。现在,余下的四个数码

① 当然是指各位数码均不相同的五位数。—— 译者注

可以排列成24种不同的方式，但是没有必要做24次乘法。我们一眼就能看出，为了得到一个五位数的积，不是8就是4必须是左边第一位数码。但是如果2的右边不是紧挨着8，乘起来就会产生一个6或一个7，但这两个数码是不能出现的。因此，我们立即就把情况缩减到只有两种，3×4128和3×4281，它们都是正确的解答。接下来假定我们要试验二位数因数21。这里我们看到，如果要乘的数在500之下，那么积或者只是一个四位数或者以10开头。因此我们只要检查843×21和834×21这两种情况就可以了。但是我们知道，积的第一个数码①将是被乘数的第一个数码的重复，而第二个数码将是被乘数第一个数码的两倍加上其第二个数码。结果，由于3的两倍加上4在我们的积中产生一个0，第一种情况立即被淘汰。现在只要对余下的那种情况用乘法试验一下，但我们发现它并没有给出一个正确的答案。如果我们接下来试验因数12，那么我们一下子就能看出，8不能在个位上，3也不能，因为它们都会产生一个6，如此等等。一双机警的眼睛和一种敏锐的判断力，将使我们能在比预期短得多的时间里对我们的表格像这样作一番清理。这个过程花了我三小时多一点的时间。

我并没有试图把六个、七个、八个和九个数码的情况下的解答全部列举出来，我只是记下了近五十个关于九个数码的例子。

86. 奇特的乘法

如果我们把32 547 891乘以6，就得到了积195 287 346。其中都是把所有九个数码各用一次且仅一次。

---

① 从右数起，下同。—— 译者注

87. 关于签到牌的趣题

把这十块签到牌分成如下三组:7 1 5—4 6—3 2 8 9 0,那么第一组乘以第二组就得出第三组了。

88. 数码除法

我们还是考虑把数码拼排得形成值分别为二分之一、三分之一、四分之一、五分之一、六分之一、七分之一、八分之一和九分之一的分数,这样比较方便。我首先在下面给出那8个答案:

$$\frac{6729}{13458}=\frac{1}{2},\quad \frac{5823}{17469}=\frac{1}{3},\quad \frac{3942}{15768}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{2697}{13485}=\frac{1}{5},\quad \frac{2943}{17658}=\frac{1}{6},\quad \frac{2394}{16758}=\frac{1}{7},$$

$$\frac{3187}{25496}=\frac{1}{8},\quad \frac{6381}{57429}=\frac{1}{9}。$$

分子数码与分母数码的和当然总是45,其"数码根"是9。现在,如果我们把这九个数码任意地分为两组,那么两个数码根的和将总是9。事实上,这两个数码根必定是9和9,或8和1,或7和2,或6和3,或5和4。在第一种情况中,实际上的和是18,但是这个数本身的数码根还是9。三分之一、四分之一、六分之一、七分之一和九分之一情况中的解答必定是9—9型的;也就是说,分子的数码根和分母的数码根都是9。然而,二分之一和五分之一情况中的解答是6—3型的,不过,那个较大的数码根当然既可以出现在分子上也可以出现在分母上;例如,$\frac{2697}{13485}$、$\frac{2769}{13845}$、$\frac{2973}{14865}$和$\frac{3729}{18645}$,在其中前两种拼排中,分子的数码根和分母的数码根分别是6和3,而在后两种中是3和6。最最奇怪的

情况或许是八分之一，这里的数码根可以是上述五种类型中的任何一种。

现在我们把这些分数的分母看成是把分子分别乘以2、3、4、5、6、7、8和9而得到的，于是我们必须对"进位"加以注意。为了使积是一个五位数，当然总要在乘了位于左边的最后一个数码后发生进位，而在大于4的每种情况中，我们必须进位至少三次。结果在从五分之一到九分之一的情况中，我们就不能仅通过互换数码位置的方法来产生不同的解答。例如，我们可以有$\frac{5832}{17496}$和$\frac{5823}{17469}$，其中$\frac{2}{6}$和$\frac{3}{9}$就互换了位置。确实，分组同样的数码经常可以有不同的拼排，如我在上一段中给出的关于五分之一的两对分数所示，但是你在这里会发现有一种更一般的数码调整，而不是简单的位置互换。还有一些小点子，每个解题者都会想到——例如数码5绝不会出现在分子的最左边，因为这将在分母中使我们得到一个0或者又一个5。同样，1也绝不能出现在这个位置，在分数为六分之一的情况中6也不能出现在这个位置，在分数为五分之一的情况中，这个位置上不能是偶数码，如此等等。用诸如我所谈及之类的小点子进行一些预备性的思考，不仅可以让我们避免把大量时间浪费在努力构思不可能的形式上，而且可以引导我们或多或少地直接走向所期望的解答。

89. 加数码

这个最小的金额是1英镑8先令$9\frac{3}{4}$便士，它的数码加起来是25。

90. 关于一百的趣题

那九个数码均用到一次且仅一次，把100这个数表示成一

个带分数，这个问题就像所有这类数码趣题，自有其迷人的一面。纯粹的生手可以通过耐心的尝试得到正确的结果，而且在发现和记下每一种新拼排方式的时候会有一种奇妙的快乐，就好像植物学家找到了某种长期搜寻的植物时那样喜悦。这件事只是把那九个数码予以正确拼排，但如果我们想要得到相当多的结果，那么由于面临着数千种可能的组合，这项工作可不像乍看上去那么容易。这里是那十一个答案，其中包括我给出作为样本的那个：

$$96\frac{2148}{537},\quad 96\frac{1752}{438},\quad 96\frac{1428}{357},\quad 94\frac{1578}{263},\quad 91\frac{7524}{836},$$

$$91\frac{5823}{647},\quad 91\frac{5742}{638},\quad 82\frac{3546}{197},\quad 81\frac{7524}{396},$$

$$81\frac{5643}{297},\quad 3\frac{69258}{714}。$$

好了，由于这里所有的分数必定代表着整数，因此将它们写成下面的形式进行处理将是比较方便的：96 + 4，94 + 6，91 + 9，82 + 18，81 + 19，以及 3 + 97。

对于任何整数，把这个整数补足到 100 的那个分数的数码根将必定呈现某种特定的模式。例如，在 96 + 4 的情况中，我们立刻就可以说，如果可以得到一个答案，那么这个分数的分子和分母的数码根一定都是 6。检查一下上面给出的前三种拼排，你会发现正是如此[①]。在 94 + 6 的情况中，分子和分母的数码根将分别是 3 和 2；在 91 + 9 和 82 + 18 的情况中，它们将是 9 和 8；在 81 + 19 的情况中，它们将是 9 和 9；而在 3 + 97 的情况中，它们将是 3 和 3。因此，每一个可以录用的分数都有其特定的数码根模

---

① 设这个分数为 x/y，则有 $x + y \equiv 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 \equiv 3 \pmod 9$，$x \equiv 4y \pmod 9$，可解得 $x \equiv y \equiv 6 \pmod 9$。其他几种情况类似。—— 译者注

式。如果你无意识地试图打破这条规律,那你只是在浪费时间。

每一位读者大概都已经意识到,某些整数显然是不可能的。例如,假如这个整数中有个5[①]那么那个分数中就会有一个0或第二个5,这是题目条件所不允许的。接下来,10的倍数,像90和80这样的,当然不可能出现。末尾是9的整数,如89和79,也是不可能出现的。这是因为那个分数的值将为11或21,其最后一位为1,这会导致数码重复。数码发生重复的整数,像88和77这样的,显然也是没有用处的。这些情况,正如我说过的,对每一位读者都是显而易见的。但是当我宣布像98+2、92+8、86+14、83+17、74+26这样的许多组合因为其不可能而必须立即抛弃时,理由就不是那么显而易见了。遗憾的是,我腾不出地方来对此作一解释[②]。

但是当所有这些已知为不可能的组合都被剔除后,却并不能说余下的所有"可能模式"实际上都会有效。作为解题之基本的模式可能是正确无误的,但是其他更深刻的原因会悄悄地爬进来挫败我们的努力。例如,98+2是一种不可能的组合,因为我们马上就能说,对于这个值为2的分数,根本没有合适的数码根模式。但是在97+3的情况中,分数的数码根却有一个合适的模式,即6和5。只有经过进一步的研究,依靠一些极为细致的考虑,我们才能断定这种模式事实上是不能实现的。用一种排除方法,可将这一解题工作大为简化。这种方法基于这样的考虑:某些乘法会导致数码重复,而且整数不可能在12到23的范围内

---

① 这应该是指个位上是个5。如果十位上是5,那么情况并非显然,而且下面的否定理由也对不上号。——译者注

② 其实,这是因为,以98+2为例,同余方程组 $x+y\equiv 1 \pmod 9$, $x\equiv 2y \pmod 9$ 无解。其他组合同理。请注意在这些组合中,分数的值都是3的倍数减1。——译者注

（包括这两个数），因为对于其中的每一个数，没有足够小的分母来形成分数部分。

91. 进一步的带分数问题

当前这道趣题的难点在于，整数 15 和 18 是不可能有解的。要判定这一点，除了尝试所有的可能，别无他法。这里是关于那十个有解的数的答案：

$$9\frac{5472}{1368}=13,\quad 9\frac{6435}{1287}=14,$$

$$12\frac{3576}{894}=16,\quad 6\frac{13258}{947}=20,$$

$$15\frac{9432}{786}=27,\quad 24\frac{9756}{813}=36,$$

$$27\frac{5148}{396}=40,\quad 65\frac{1892}{473}=69,$$

$$59\frac{3614}{278}=72,\quad 75\frac{3648}{192}=94。$$

对于其中的 16、20 和 27，我只是各找到了一种拼排方式；但其他几个数，都能用不止一种的方式给出解答。至于 15 和 18，虽然它们可以用简分数轻易地得到解决，然而“带分数”必须要有一个整数部分；虽然我动脑筋巧妙地钻了题目条件的空子（如下所示，这分数既是带分数又是繁分数），但是严格地遵照题目所示的形式应是更恰当的做法：

$$3\frac{\frac{8952}{746}}{1}=15,\quad 9\frac{\frac{5742}{638}}{1}=18。$$

我已经证明，100 以下的正整数，除了 1、2、3、4、15 和 18 之外，都有合适的解。其中前面三个数的不可能有解是很容易证明

的。我还注意到，数码根为8的数——即像26、35、44、53这样的数——似乎有着最大数量的答案。仅仅是26这个数，我就记下了不少于二十五种的不同拼排方式，而且我毫不怀疑还有更多的拼排方式。

92. 数码拼成平方数

据我所知，目前还没有一张公开出版的平方数表大到可以帮助我们解决这道趣题。含有那九个数码，且每个数码均用到一次且仅一次的平方数，最小的是139 854 276，即11 826的平方。同样条件下，最大的数是923 187 456，即30 384的平方。

93. 神秘的十一

大多数人都知道，一个数奇数位上的数码和等于其偶数位上的数码和，则这个数就能被11整除而不留下余数。举例来说，在896 743 012中，奇数位上的数码是2、0、4、6、8，加起来是20；而偶数位上的数码1、3、7、9加起来也是20。因此这个数可以被11整除。但是看来几乎没人知道，如果奇数位数码和与偶数位数码和的差是11，或者是11的倍数，那么这个法则同样适用。这条规律使我们能够通过很少的尝试，找到含有那十个数码（把0也称为数码）中的九个，且能被11整除的最小数102 347 586，以及最大数987 652 413。

94. 数码构成一百

在这九个以数值大小为顺序排列起来的数码之间放入算术符号，使得给出的表达式等于100，可以有许多许多种不同的方式。事实上，读者如果不是非常仔细地研究这件事，他或许不会料到有这么多合适的方式。正是由于这个原因，我加上了不仅符

号要用得尽可能少，而且笔画也要尽可能少的条件。这样，我们就把这个问题限制在一个单一的解上，从而达到最简单从而也是最好(在这个情况中)的结果。

就像在幻方的情况中那样，存在着一些方法，可让我们用来非常轻易地写下许许多多的解，但不是所有的解，因此我们可以有好几种方式迅速地给出这个"数码构成的一百"的几十种排列，而不是找出所有合适的排列。事实上，在这件事上几乎没有什么准则，而且也没有什么确定的方式来表明我们已经得到了最好的解。我能说的只是，我在下面作为最好解而给出的排列，是我寻找至今所获得的最好解。我将给读者几个有趣的样本，其中第一个是通常公布的解，最后一个就是我所知道的最好解。

	符号数	笔画数
$1+2+3+4+5+6+7+(8\times9)=100$	9	18
$-(1\times2)-3-4-5+(6\times7)+(8\times9)=100$	12	20
$1+(2\times3)+(4\times5)-6+7+(8\times9)=100$	11	21
$(1+2-3-4)(5-6-7-8-9)=100$	9	12
$1+(2\times3)+4+5+67+8+9=100$	8	16
$(1\times2)+34+56+7-8+9=100$	7	13
$12+3-4+5+67+8+9=100$	6	11
$123-4-5-6-7+8-9=100$	6	7
$123+4-5+67-8-9=100$	4	6
$123+45-67+8-9=100$	4	6
$123-45-67+89=100$	3	4

人们会注意到，在上面我把括号算作一个符号、两个笔画。最后这个解简单得出奇，我想它保持的纪录永远不会被打破了。

95. 四个七

将四个七加上简单的算术符号写下来，使得其运算结果等于 100 的方式如下：

$$\frac{7}{.7} \times \frac{7}{.7} = 100。$$

零点七分之七这个分数当然等于 7 除以$\frac{7}{10}$，相当于 70 除以 7，即 10。然后 10 乘以 10 等于 100。原来如此！可以看出，不管你用什么数代替 7，这个解决办法同样适用。

96. 骰子上的数

所有可以用任何给定的四个不同数字拼成的数之和，总是 6666 乘以这四个数字之和[①]。例如，1、2、3、4 加起来等于 10，而 10 乘 6666 是 66 660。现在，从骰子上的七个数字（请回想 6 和 9 可以相互调头这个花招）中取出四个数字有三十五种不同的方式。这三十五个组合中的所有数字加起来等于 600[②]。于是 6666 乘以 600 就把正确答案 3 999 600 给了我们。

让我们把骰子扔掉，用那九个数码（不包括 0），从一般的角度来研究这个问题。现在，如果只是给你这些数码的和 —— 也

---

① 以 1、2、3、4 为例。用这四个数字拼成的数，个位数是 1 的有 3! = 6 个，是 2 的，是 3 的，是 4 的，都是 6 个。因此，这些数的个位数加起来是 (1 + 2 + 3 + 4) × 6。同理，这些数的十位数、百位数、千位数加起来都是 (1 + 2 + 3 + 4) × 6。因此，这些数的和就是 (1 + 2 + 3 + 4) × 6 × (1000 + 100 + 10 + 1)，即 (1 + 2 + 3 + 4) × 6666。—— 译者注

② 这是因为，每个数字在这些组合中的出现次数都是 $C_6^3 = 20$ 次，而 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 9 = 30，30 × 20 = 600。—— 译者注

就是说,假定题目条件是,你可以使用任何四个数字,只要它们的和等于一个给定的数 —— 那么我们得想到,有些四数字组合会给出相同的和。这种情况有许多。

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	3	5	6	8	9	11	11	12

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	11	9	8	6	5	3	2	1	1

这里上面一行中的数给出了所有可能的四个不同数字之和,而下面一行则给出了可以加得相应和的不同方式数。例如,13 这个和可以由三种方式加得:1 + 2 + 3 + 7,1 + 2 + 4 + 6,1 + 3 + 4 + 5。你会发现,下面一行中的数加起来等于 126,这正是从那九个数字中每次取四个所得组合的个数。根据这张表,我们可以立即算出如下问题的答案:所有由四个加起来等于 14 的不同数码(不包括 0) 拼成的四位数之和是多少?把 14 乘以表中位于它下方的数 5,再把乘得的结果乘以 6666,你就得到答案了。由此可得,要知道所有由四个不同数码拼成的四位数之和,你可以把两行中上下对应着的每对数相乘,再把乘得的结果统统加起来,你会得到 2520,把它乘以 6666,就给出了答案16 798 320。

下面这个关于任何位数[①]的一般解法无疑会让读者感兴趣。令 n 表示位数,则 $5 \times (10^n - 1) \times 8!$ 除以 $(9 - n)!$ 就等于所要求的和[②]。注意 0! 等于 1。这个解法可以简约成下面这个实用

---

① 由于要求数中各位数码不相同,因此最多不过九位数。—— 译者注

② 每个数码在这些数的某一位上出现的次数都是 $A_8^{n-1} = 8!/(9 - n)!$,而 11…1(n 个 1) 可表示为 $(10^n - 1)/9$。由此可知,所求的和为 $(1 + 2 + 3 + \cdots + 9) \times [8!/(9 - n)!] \times [(10^n - 1)/9]$,经整理即得。—— 译者注

的规则:将 $4\times7\times6\times5\times\cdots$ 乘到第 $n-1$ 个数①;在乘得结果的右边添上 $n+1$ 个0,拼成一个数,再把这个数减去在原乘得结果的右边仅添一个0而拼成的数②。以 $n=4$ 为例(就是我们刚才的情况),$4\times7\times6=168$。于是16 800 000减去1680就使我们以另一种方法得到了16 798 320。

97. 桌子上的点子

这位智力平平的小男生也许会循规蹈矩地把这道题目处理成一个二次方程。这里是真正的算术解法。把两个到墙距离的积翻倍。这使我们得到144,它是12的平方。这两个距离的和是17。如果我们把12和17这两个数相加,同时又从其中一个减去另一个,我们就得到了两个答案:29或5,这桌子的半径,即直径的一半。因此,直径为58英寸,或10英寸。但是一张具有后一种尺寸的桌子是很滑稽的,而且与插图也完全不相符。所以这张桌子的直径是58英寸。在这种情况中,那个点子位于靠近房间角落的桌边上——那男孩正指着它。如果取另一个答案,这点子将位于远离房间角落的桌边上。

98. 学校的礼节

这所学校肯定有十名男生、二十名女生。因此,女生对女生鞠的躬是380个,男生对男生鞠的躬是90个,男生女生之间鞠的躬是400个,男女生对那位教师鞠的躬是30个,总共900个,与题目所说相符。应当记住的是,并没有说那教师要向学生还礼。

---

① 即计算 $4A_7^{n-2}=4\times7\times6\times5\times\cdots\times(10-n)$。——译者注

② 这里即把 $5\times(10^n-1)\times8!/(9-n)!$ 改写为 $4\times7\times6\times\cdots\times(10-n)\times10^{n+1}-4\times7\times6\times\cdots\times(10-n)\times10$。——译者注

99. 三十三颗珍珠

中间最大的那颗珍珠一定是价值 3000 英镑。一端上的那颗珍珠(从它开始,珍珠的价值以 100 英镑递增)价值 1400 英镑。另一端上的那颗珍珠,600 英镑。

100. 工人的趣题

这人说,“我还要挖现在的两倍深”,而不是说“还要挖比现在的多两倍深”。这就是说,他还要挖的深度是他已经挖好的深度的两倍。这样,当这洞挖好后,其深度将是现在的三倍。于是,答案是:这洞现在深 3 英尺 6 英寸,这人高出地面 2 英尺 4 英寸;当洞挖好后,其深度将为 10 英尺 6 英寸,那时这人将低于地面 4 英尺 8 英寸,即位于深度为他现在高出地面距离两倍的地方。

101. 干草捆

把这十个重量加起来,再除以 4[①],我们得到 289 磅,这就是那五捆干草的总重量。如果我们按重量大小的顺序称这五捆干草为 A、B、C、D、E,其中 A 为最轻,E 为最重,则最轻的重量 110 磅一定是 A 和 B 的重量和;而第二轻的重量 112 磅,一定是 A 和 C 的重量和。接下来,最重的两捆干草 D 和 E,其重量和一定是 121 磅,而 C 和 E 的重量和一定是 120 磅。于是我们知道了 A、B、D、E 的重量和是 231 磅。从 289 磅(五捆干草的总重量)中减去它,就给了我们 C 的重量 58 磅。现在,只要用减法,我们就能算出这五捆干草每一捆的重量 —— 它们分别是 54 磅、56 磅、58 磅、59 磅和 62 磅。

---

① 因为每捆干草都称了 4 次。—— 译者注

102. 格宾斯先生如坠五里雾

这蜡烛一定是点了三小时三刻钟。一支蜡烛剩下了全长的十六分之一,另一支剩下了十六分之四。

103. 漆灯杆

不管有多少灯杆,帕特一定是比蒂姆多漆了六根灯杆。例如,假定马路两边各有十二根灯杆,那么帕特漆了十五根,蒂姆九根。如果两边各有一百根,那么帕特漆了一百零三根,蒂姆只有九十七根。

104. 抓　　贼

这位警察跑了三十步。在这段时间内,窃贼跑了四十八步。加上他开头跑的二十七步,一共是七十五步。这个距离正好等于警察跑的三十步。

105. 行政堂区委员会选举

这位投票人只选一名候选人可以有 23 种选法,选两名有 253 种选法,选三名有 1771 种,选四名有 8855 种,选五名有 33 649 种,选六名有100 947 种,选七名245 157 种,选八名 490 314 种,选九名817 190 种。把这些全加起来,我们就得到总共有1 698 159 种选法[①]。

106. 糊涂城的选举

自由党、保守党、独立党和社会党得到的票数分别是:1553、

① 你考虑过一个也不选的情况吗?——译者注

1535、1407和978。要做的事只是把那三个差额(共739票)加到总票数5473上(得到6212),然后除以4,这就给了我自由党的得票数1553。于是其他三个党的得票数当然可以通过把这三个差额相继从这个数中减去而得到。

107. 妇女参政主义者的会议

出席这次会议的有十八人,其中十一人离去。如果走了十二人,那么有三分之二的人退出。如果只走了九个人,那么这次会议就失去了一半与会者。

108. 闰年女士

唯一正确的答案是:有11 616位女士提出了求婚。这里是所有的细节,读者可把它们对照题目原文进行验算。10 164名独身女子中,有8085人嫁给了单身汉,627人嫁给了鳏夫,1221人被单身汉拒绝,231人被鳏夫拒绝。1452名寡妇中,有1155人嫁给了单身汉,297人嫁给了鳏夫,没有一名寡妇被拒绝。只要我们能正确地解读这道题目,用代数方法是不难把它解决的。

109. 夺糖大战

满足这些条件的糖果数目最小是26 880。这五个男孩各人所得为:安德鲁,2863;鲍勃,6335;查利,2438;戴维,10 204;埃德加,4950。在题目接近末尾的叙述中隐藏着一个小陷阱:“这份糖豆的五分之一”。初看上去这似乎要把对此事态的描述全部搅乱。但稍稍想一下就会明白,这句话只可能是指“八分之五(刚刚提到的那个分数)的五分之一”——也就是说,鲍勃和安德鲁刚刚所得糖果的四分之三的八分之一。

110. 隐修院院长的趣题

唯一的答案就是有5个男人、25个女人和70个儿童。这样一共是100个人，女人是男人的5倍。男人一共分得15蒲式耳，女人50蒲式耳，儿童35蒲式耳，所以正好是分配了100蒲式耳。

111. 割麦子

整块麦田的面积一定是46.626平方杆。中央那块被农夫留下的小正方形的边长是4.8284杆，因此它的面积是23.313平方杆。于是这块麦田的面积比四分之一英亩大，比三分之一英亩小；更准确地说，是0.2914英亩。

112. 一笔伤脑筋的遗产

查尔斯的死亡，使得他原来应得的那份遗产复归，因此我们只要把这整整一百英亩土地以三分之一比四分之一的比例在艾尔弗雷德和本杰明之间划分就可以了。三分之一比四分之一就是十二分之四比十二分之三，也就是四比三。于是艾尔弗雷德拿这一百英亩的七分之四，本杰明拿七分之三。

113. 撕开的数

满足这道趣题所有要求的其他数是9801。如果我们把这个数从中间分开，成为两个数，再把它们加起来，我们就得到99。99自乘，即得9801。不错，2025也可如此看待，只是这个数被任两个数字都不能相同这个条件所排除。

一般情况下的解法很奇特。把被撕标签每一半上的数字个数称为n。那么，如果我们取10^n-1的素因数分解式（1也要被看作是素因数，其指数恒为1）的每个指数（除了3的指数），把它

们分别加上 1,再乘起来,则得到的积就是解的个数。例如,对于一张有六位数字的标签来说,$n = 3$。不考虑3^3,$10^3 - 1$ 的素因数有 $1^1 \times 37^1$,于是那个积就是$2 \times 2 = 4$,此即解的个数。这里总把 98-01、00-01、998-001、000-001 等形式较为特殊的解包括在内。解的求法如下:对 $10^3 - 1$ 进行所有可能的因数分解①,但 3 的幂不能拆散②,这样就有 37×27、999×1。然后解不定方程 $37x = 27y + 1$,解得 $x = 19$ 和 $y = 26$。于是,$19 \times 37 = 703$,703 的平方 494 209 就给出了一张标签。(通过 $27x = 37y + 1$ 给出的) 一个补解可从$10^n - 703 = 297$ 立刻得到,297 的平方就为又一张标签给出了 088 209。(左边那些无意义的 0 必须添上,尽管它们会导致像 00238-04641 $= 4879^2$ 这样的怪异情况,这里作 2380-4641③是不能满足要求的。) 对于形式较为特殊的情况 999×1,按照上面显示的规律,即在左半边添上些 9,在右半边添上些 0,我们立即就可以写出 998 001。而它的补解就是 1 前面添上五个 0,即 000 001。这样我们就得到了 999 和 1 的平方。一共是四个解④。

---

① 似指仅分解为两个因数(当 $n \geqslant 4$ 时,即使不把 1 当作因数,也是有可能分解为两个以上的因数的)。否则,下面的方程无法列出。—— 译者注

② 严格地说,任何素因数的幂都不能拆开。换句话说,是把 $10^n - 1$ 分解为两个互素的因数,否则下面的方程无解。—— 译者注

③ 在 $n = 5$ 的情况下,会解得 $4879^2 = 23\ 804\ 641$,这时把此数分为两个四位数是不行的。注意 $n = 5$,必须在前面添上两个 0,再分为两个五位数。—— 译者注

④ 设 a、b 为两个 n 位数,则有$(a + b)^2 = 10^n a + b$。令$c = a + b$,则有 $c^2 = (10^n - 1)a + c$,即 $c(c - 1) = (10^n - 1)a$。这说明 $10^n - 1$ 整除 $c(c - 1)$。现设 u、v 满足条件:(1)u 与 v 互素;(2)$uv = 10^n - 1$。注意到 c 与 $c - 1$ 互素,因此可设 u 整除 c,v 整除 $c - 1$。于是 $ux = c$,$vy = c - 1$,即 $ux = vy + 1$(此即方程 $37x = 27y + 1$ 的由来),解此方程,可得一解。又可设 v 整除 c,u 整除 $c - 1$,则有 $vx = uy + 1$(此即方程 $27x = 37y + 1$ 的由来),又得一解。可见解的个数即符合上述条件的有序数对(u,v) 的个数。此数即 2^m,其中 m 是 $10^n - 1$ 的不同素因数(不计 1) 的个数。这与作者的结论在本质上有所不同,请读者评判。—— 译者注

114. 奇特的数

除48之外,那三个最小的数是1680、57 120和1 940 448。你会发现,1681和841、57 121和28 561、1 940 449和970 225,分别是41和29、239和169、1393和985的平方。

115. 排字工人的错误

答案是$2^5 \cdot 9^2$,它与2592是一回事,而且这是这道趣题的唯一合适的解答。

116. 转变态度的守财奴

由于没有告诉我们贾斯珀·布利翁先生是在怎样的年份把他积蓄的财产进行这一慷慨捐赠的,只是要求我们找出最少的金钱数额,因此很显然,我们得寻找一个形式最为合适的年份。

有四种情况要考虑——有五十二个星期日的平年、有五十三个星期日的平年、有五十二个星期日的闰年和有五十三个星期日的闰年。这儿是各种情况下最少的金钱数量:

313个工作日,52个星期日	112 055英镑
312个工作日,53个星期日	19 345英镑
314个工作日,52个星期日	无解
313个工作日,53个星期日	69 174英镑

最少的金钱数量,从而是正确的答案,是19 345英镑。捐赠是在一个以星期日为元旦的平年进行的。最近的这种年份是1911年[①]。他在这年的每一天要付出53英镑,或者在每个工作日

① 这是当时的情况。以现在来说,最近的这种年份就是2006年。——译者注

付出62英镑，最后剩下1英镑，正如在后一种情况所要求的。

117. 一个围栏问题

虽然对于任何一个具有一点代数知识的人来说，这道趣题根本就没什么大难，但它或许还是有着相当令人感兴趣的方面。

单单看这所提正方形牧场的一角，就像在插图中看到的那样，人们几乎不会料想到这样的事实：这个牧场，要符合有关条件，就必须有501 760英亩的面积，围栏也需要同样数目的横档。然而，这是正确的答案，而且是唯一的答案。如果艾奥瓦州的那位先生实现了他的意图，他这个牧场的每条边将有二十八英里长，比威斯特摩兰郡[1]还要稍稍大一点。我不知道对于“场地”的大小是否规定过限制，但是在英国，它们不会搞得这么大。不过，远在我那位通信者居住的艾奥瓦州，人们做这些事习惯用大手笔。然而，我有理由相信，当他弄明白他给自己提出的这项任务是个什么级别时，他会坚决放弃的；因为如果那些奶牛们决定到清新的树林和新鲜的草地去溜达溜达，那么挤奶女工为了能挤到晨奶，必须提前一个星期出发。

这里有一条规则，对于横档长度为半杆的场合总能适用。把一个栏架中所用横档的数目乘以四，所得结果即为所占英亩数与全部围栏所用横档数相等的正方形场地边长的英里数。例如，用只有一根横档的围栏，则这块场地即为四英里见方；用有两根横档的围栏，则为八英里见方；用有三根横档的围栏，则为十二英里见方；等等。而我们那七根横档的围栏，乘以四以后就给出了二十八英里见方的一个牧场。在我们现在这道题目的情况下，如果牧场围得小一些，那么横档数将超过英亩数；而如果牧场围

---

[1] 英国旧郡名，该郡在英格兰北部，1974年并入坎布里亚郡。—— 译者注

得大一些,那么横档数就会小于这个牧场的英亩数。

118. 化方为圆

虽然这道题目可能让新手感到棘手,认为它相当难,但实际上它是十分容易的,如果是填入十个数字中的四个,那就更容易了。

首先,你会发现,位于同一条直径两端的平方数之差都是相同的。例如,图中 14 的平方与 2 的平方之差是 192,而 16 的平方与 8 的平方之差也是 192。每一种情况都是这样。其次,应该想起,相继两个整数的平方差总是其中较小数的两倍加上 1[①],而任何两个整数的平方差总能表达为它们的差乘以它们的和。例如,5 的平方(25) 减去 4 的平方(16) 等于(2 × 4) + 1,即 9;还有,7 的平方(49) 减去 3 的平方(9) 等于(7 + 3) × (7 − 3),即 40。

现在,根据上述分析,把 192 这个数分解为一对偶因数,这可以有五种不同的方式:2 × 96,4 × 48,6 × 32,8 × 24,以及 12 × 16。把它们分别除以 2,我们得到:1 × 48,2 × 24,3 × 16,4 × 12,以及 6 × 8。分别求其中每一对数的差与和,依次产生了 47、49,22、26,13、19,8、16,以及 2、14。这些就是所求的数,其中的四个已经放人。需要添加的六个数只可以用六种不同的方式放人,其中的一种如下:按顺时针方向数,16、2、49、22、19、8、14、47、26、13。

我只是想把读者的注意力带到另一个小特点上。在所有这样的圆圈中,一直径两端的数之差是按某一比率增长的,首先是增加到 4 和 6,接下来的数就是其再前一个数的两倍(6 个方框

① 这一性质在下面的解题过程中似未用到。—— 译者注

的圆圈除外)。例如，在上述情况中，第一个差是2，接下来的就分别增加到4、6、8和12。当然，如果我们允许分数，就可以找到无穷多个解。然而，这种圆圈中的方框数目必须是$4n+6$的形式，即必须是由6加上4的一个倍数而形成的一个数。

119. 拉克布兰的小损失

这位教授开始玩牌时一定是有十三先令，波茨先生有四先令，波茨太太有七先令。

120. 农夫与他的绵羊

这农夫只有一只绵羊！如果他把这只绵羊分为两部分(最好是按照重量)，使得一部分是三分之二，另一部分是三分之一，那么这两个数的差与它们的平方差就是一回事——也就是说，都是三分之一。任何两个分数，只要分母等于两个分子之和，都能行。

121. 正面与反面

克鲁克斯肯定是有所失，而且他赌的时间越长，他失去的钱就越多。如果硬币掷了两次，那么他手中还剩下他原有钱的四分之三；如果掷了四次，那么还剩下他原有钱的十六分之九；如果掷了六次，那么还剩下他原有钱的六十四分之二十七。只要输赢的次数最终相等，输赢的次序是无关紧要的。

122. 跷跷板趣题

这男孩的体重一定是在39.79磅左右。一块砖重3磅，因此16块砖重48磅，而11块砖重33磅。48乘以33，再取平方根，即得所求。

123. 一个法律上的困难

很显然,死者的意图是:给儿子的遗产是给这位母亲的两倍,或者给女儿的遗产是给这位母亲的一半。因此,最公正的分法是:母亲拿七分之二,儿子拿七分之四,女儿拿七分之一。

124. 一个关于释义的问题

当然,在面积上,一英里见方与一平方英里是毫无差别的。但是在**形状**上,它们可以有相当大的差别。一英里见方不能是其他形状,只能是正方形;这个表达用语描述了一块具有某种特定尺寸和特定形状的表面。一平方英里可以是任何形状;这个表达用语说的是一个单位的面积,但是并没有规定任何特殊的形状。

125. 矿工们的假日

比尔·哈里斯一定是花费了十三先令六便士,这比这七人的平均水平——半个几尼,多了三先令。

126. 简单的乘法

所求的数为3 529 411 764 705 882。通过把3从这排数字的一头移到另一头这个投机取巧的简单方法,就可以达到把这个数乘以3再除以2的目的。如果你想要一个更长的数,你可以顺序不变地重复这十六个数字,把这个数延长到任何长度。

127. 简单的除法

依次把每个数从其他每个数中减去,我们得到358(两次)、716、1611、1253和895。现在,我们一眼便看出,唯一能把其中每个数都整除而不留余数的数将会是179,例如358等于2×179。

通过尝试，我们发现它正是这样的一个除数。因此，179 就是我们所要的那个除数，用它去除原来给出的每个数，总是留下余数164。

128. 一个关于平方数的问题

这三块木板的边长分别是 31 英寸、41 英寸和 49 英寸。它们面积的公差正好是五平方英尺。其平方成等差数列的三个数，公差为 7 的是$\frac{113}{120}$、$\frac{337}{120}$和$\frac{463}{120}$，公差为 13 的是$\frac{80929}{19380}$、$\frac{106921}{19380}$和$\frac{127729}{19380}$。如果是整数的平方，那么其公差总会被 24 整除，因此很显然，我们的平方数必须是分数。读者现在应该试着去解决公差为 23 的情况。那可是根硬骨头哦。

129. 黑斯廷斯战役

任何数（只要它本身不是一个平方数）都可乘以一个平方数而给出一个比另外某一平方数小 1 的积。给定的那个数其本身不能是平方数，因为一个平方数乘以一个平方数，其积必是平方数，而平方数加上 1 绝不会是平方数。我这里所有的评述必须被理解为是针对整数的，因为分数个数的士兵在战争中是没多大用处的。

好，在从 2 到 99 的所有数（包括 2 和 99）中，61 正好是解决起来最困难的一个数。对我们这道趣题来说，关于尽可能最少人数的答案是，哈罗德的军队由3 119 882 982 860 264 400 人组成。也就是说，对于那六十一个方阵的每个方阵来说，都是有51 145 622 669 840 400（226 153 980 的平方）人。加上一人（哈罗德），他们就能排成一个大方阵，其每边有1 766 319 049 人。

以这个问题为特例的一般问题,称为“佩尔方程”—— 这显然是因为佩尔既不是最早宣布这个问题的人也不是最早解决这个问题的人!它当初是作为一项挑战由费马向他那个时代的英格兰数学家们提出的。用连分数可把它容易地解决。

在 100 以下的数中,难度仅次于 61 的是 97,这里 $97 \times 6\,377\,352^2 + 1 =$ 一个平方数。

我断定那本编年史中的数字一定有什么地方搞错了,理由是,我们可以自信地说,哈罗德的军队不会超过三百亿亿人!如果这支军队(不用再说诺曼人的军队了)把地球的全部表面(包括海洋)用来扎营,那么每个人只能在比一平方英寸的四分之一多一点点的范围内活动!换句话说,如果给每人以一平方英尺的站位,每个小方阵就需要有一个直径为地球直径三倍的星球所能给出的全部场地。

130. 雕塑家的问题

稍稍想一下就会明白,答案必须是分数,而且一个分数是分子比分母大,另一个分数是分子比分母小。事实上,如果我们要取数字最小的答案,那么大立方体的高度一定是$\frac{8}{7}$英尺,小立方体的高度是$\frac{3}{7}$英尺。于是,在长度上是$\frac{11}{7}$英尺,即$1\frac{4}{7}$英尺。那么这两个立方体的体积是多少呢?第一个是$\frac{8}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{7} = \frac{512}{343}$,第二个是$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{27}{343}$。把它们加起来,结果是$\frac{539}{343}$,经约分,变成$\frac{11}{7}$,即$1\frac{4}{7}$立方英尺。因此我们看到,立方英尺数和英尺数完全一致。

这个思想的萌芽可在亚历山大城的丢番图于大约于 4 世纪初撰写的著作里找到。这些分数三个一组地出现，并可从三个生成元 a、b、c 获得，其中 a 是最大的，c 是最小的。

于是 $ab + c^2$ = 分母，而 $a^2 - c^2$、$b^2 - c^2$ 和 $a^2 - b^2$ 就是那三个分子。例如，使用生成元 3、2、1，我们就可以得到$\frac{8}{7}$、$\frac{3}{7}$、$\frac{5}{7}$。我们可以把其中第一个与第二个配对，就像在上述解答中那样；也可以把第一个与第三个配对，从而得到第二组解。分母必须是一个 $6n + 1$ 型的素数或这种素数的乘积[①]。例如你可以有 13、19 等等，但不可以有 25、55、187 等等。

理解了这个原则，就可以毫无困难地写下许多组立方体的尺寸，最挑剔的收藏者要多少就有多少。例如，如果读者想要一个有许多 9 的，或许下面这个会令他满意：$\frac{99999999}{99990001}$ 和 $\frac{19999}{99990001}$。

131. 西班牙守财奴

一定是一只箱子里有386枚，另一只箱子里有8450枚，第三只箱子里有16 514枚，因为386是可能出现的最小枚数。如果我问的是最小的金币总枚数，那答案将是482、3362 和 6242。你可以发现，在这两种情况中，三只箱子中任两只箱子里的金币合起来，其枚数都成为平方数。这里有一个稀奇的巧合（仅仅是巧

---

① 设这两个立方体的边长分别为 a/c 和 b/c，则有 $a^2 - ab + b^2 = c^2$。令 $x = a + b, y = a - b, z = 2c$，则有 $x^2 + 3y^2 = z^2$。关于这个不定方程的解法，可参见《初等数论》（于秀源、瞿维建著，山东教育出版社 2004 年版）第四章习题二的第 4 题及其参考答案。——译者注

合,因为它并不总会发生):在第一个解中,每个枚数的数码加起来都是17;在第二个解中,每个枚数的数码加起来则都为14。应当提请注意的是,三个枚数中,大小居中的那个总是一个平方数的一半。

132. 九只财宝盒

这里是满足条件的答案:

A = 4	B = 3364	C = 6724
D = 2116	E = 5476	F = 8836
G = 9409	H = 12 769	I = 16 129

这些数每个都是平方数,其平方根,按字母顺序分别是2、58、82、46、74、94、97、113和127,而规定的A和B之差、B和C之差、D和E之差等等,在每一种情况中都是3360。

133. 五个强盗

这笔总共为200枚达布隆的金钱,能以6627种不同方式中的任一种为这五个强盗所拥有。阿方索拥有的达布隆枚数可以是从1到11的任何一个数。如果他拥有1枚达布隆,那么就有1005种不同的方式来分配余下的达布隆;如果他拥有2枚,那就有985种方式;如果3枚,就有977种方式;如果4枚,有903种方式;如果5枚达布隆,有832种方式;如果6枚达布隆,704种方式;如果7枚达布隆,570种方式;如果8枚达布隆,388种方式;如果9枚达布隆,200种方式;如果10枚达布隆,60种方式;而如果阿方索拥有11枚达布隆,那么余下的达布隆可以用3种不同的方式来进行分配。多于11枚的达布隆他是不可能拥有的。请不要指望我会把这6627种方式详尽地给出来。我打算做的是,使读者能够(如果他十分乐意的话)写出当阿方索拥有某一数

量金币时的所有答案。让我们取阿方索拥有6枚达布隆时的情况,看看我们怎样得到上面所说的全部704种不同的方式。这里有两张表,它们将用作通向所有这些答案的钥匙:

表 I	表 II
$A=6$,	$A=6$,
$B=n$,	$B=n$,
$C=(63-5n)+m$,	$C=1+m$,
$D=(128+4n)-4m$,	$D=(376-16n)-4m$,
$E=3+3m$。	$E=(15n-183)+3m$。

在第一张表中,我们可以用从1到12(包括这两者)的任何整数来代替 n,而 m 可以是0或从1到 $31+n$(包括这两者)的任何整数。在第二张表中,n 可以取从13到23(包括这两者)的任何整数值,而 m 可以是0或从1到 $93-4n$(包括这两者)的任何整数。于是第一张表对 n 的每个取值给出了 $32+n$ 个答案;而第二张表对 n 的每个取值给出了 $94-4n$ 个答案。因此,前者产生了462个答案而后者产生了242个答案,总共是704个答案,正如上所述。

让我们取表 I,并令 $n=5$ 而 $m=2$;又在表 II 中取 $n=13$ 而 $m=0$。于是我们立刻得到这样两个答案:

A =	6	A =	6
B =	5	B =	13
C =	40	C =	1
D =	140	D =	168
E =	9	E =	12
	200　达布隆		200　达布隆

你会发现它们完全符合条件。阿方索拥有六枚达布隆时那704个答案中所有其余的答案，都可以这样从这两张表用不同的数代 m 和 n 而得到。

换一种方式说，对于阿方索的每种拥有情况，答案的个数是两个等差数列的和，一个等差数列的公差是1，另一个数列的公差是 -4。例如在阿方索拥有6枚达布隆的情况中，一个数列是 $33+34+35+36+\cdots+43+44$，另一个是 $42+38+34+30+\cdots+6+2$。第一个级数的和是462，第二个级数的和是242——结果再一次与已给数字相符。可说这道题目的要点是在于求出这些数列的首项和末项。我应该指出，在阿方索拥有9、10或11枚的情况中，只有一个数列，是第二种类型的。

134. 银行职员的趣题

要使一些六便士硬币不能分成数量相同的几堆，其枚数必须是一个素数。如果这位银行职员能够弄出一个素数，他就赢了。我将展示，不管那客户会向盒子里放多少硬币，银行职员总能做到这一点，因此他必定会赢。这位银行职员必须首先放入四十枚六便士硬币，然后，不管客户会加进多少，他将要求后者从柜台上拿一些硬币放入盒中，其枚数是比客户刚放入盒中的枚数少一的那个数的平方。举例来说，银行职员放入40枚，我们假定客户加进6枚，然后又从柜台上拿25(5的平方)枚放入，这样总共是71枚，是个素数。再试一次。银行职员放入40枚，客户加进12枚，然后又按银行职员的要求在柜台上拿121(11的平方)枚放入，总共173枚，是个素数。解开这道趣题的钥匙是这样一件奇特的事实:从1到39的任何一个正整数，如果加上自己的平方，再加上41，结果必定是个素数。这件事首先是由伟大的数学家欧拉发现的。有人曾建议，银行职员可以要求客户从柜台上拿

足够多的硬币放入，以把盒中硬币的枚数增加到某个给定的数。但是这样一来，不仅把事情弄荒唐了，而且违反了双方都不应知道对方放入多少的规定。

135. 石匠的问题

这道趣题相当于这样一道题目：找出可表示成三个以上相继立方数(不许有立方数1)之和的最小平方数。由于要求提供三堆以上的石块，这就排除了$23^3+24^3+25^3=204^2$，否则它就是最小的答案。但是，$25^3+26^3+27^3+28^3+29^3=315^2$这个答案是可以的。不过，正确的答案有着更多的石堆，而更小的石块总数。它就是：$14^3+15^3+\cdots+25^3$，即一共十二个石堆，其中的石块加起来是97 344块，它们可以铺开来形成一个312×312的正方形。我只想指出，通向解答的一把钥匙在于所谓的三角形数(参见第43页、第80页和第261页)。

136. 苏丹的军队

最小的几个$4n+1$型素数是5、13、17、29和37，而最小的几个$4n-1$型素数是3、7、11、19和23。好，第一种类型的素数总可以表示成两个平方数之和，不过只能以一种方式。例如，$5=4+1$，$13=9+4$，$17=16+1$，$29=25+4$，$37=36+1$。但是第二种类型的素数无论如何也不能表示成两个平方数之和。

要实现一个数可用好几种不同方式表示成两个平方数之和，这个数必须是一个含有多个我们那第一种类型素数的合数。例如，单单是5或13，就只能以一种方式如此表示；而65(5×13)能以两种方式表示，1105($5\times13\times17$)能以四种方式，32 045($5\times13\times17\times29$)能以八种方式。可见，每引进一个新的这种类型的因数，我们就能把表示方式的种数翻一番。不过，请

注意我说的是新的因数,因为因数发生重复时将遵循另一条规律。我们不能用两种方式表示 25(5 × 5),而只能用一种方式表示。但是,125(5 × 5 × 5) 能以两种方式给出,625(5 × 5 × 5 × 5) 亦如此。而如果再加进一个 5,我们就能用三种不同的方式把这个数表示成两个平方数之和了。

如果有一个第二种类型的素数混进了你的合数,那么你这个数就不能表示成两个平方数之和。例如,15(3 × 5) 就不行了,135(3 × 3 × 3 × 5) 同样不行。不过,如果我们加进偶数个 3,那倒行了,因为这些 3 本身就形成了一个平方数,但是你只能有一个解。例如,45(3 × 3 × 5,或 9 × 5) = 36 + 9。类似地,因数 2,或者 2 的幂,如 4、8、16、32,总是可以出现的,但它们的引进或消除绝不会对你解答的个数产生影响,除非像 50 这样的情况,这里是一个平方数的两倍,因此给了你两个答案,49 + 1 和 25 + 25。

现在,直接把一个数分解成它的素因数,于是我们一看就能知道它是不是能分成两个平方数。如果能,那么求出有多少种方式的过程是如此简单,以至于可以不费吹灰之力地用心算完成。我在题目中给出的数是 130,我立刻就看出这是 2 × 5 × 13。接下来的推理就是,由于 65 能用两种方式表示(64 + 1 和 49 + 16),所以 130 也能用两种方式表示,因数 2 对这个问题没有影响。

最小的可用十二种不同的方式表示成两个平方数之和的数是 160 225,因此这就是适合那位苏丹之要求的军队的最少人数。这个数由因数 5 × 5 × 13 × 17 × 29 构成,每个因数都是上面规定的类型。如果它们是各不相同的因数,那就会有十六种方式,但由于其中的一个因数重复出现,故只有十二种方式。这里是这十二对方阵的边长:400 和 15,399 和 32,393 和 76,392 和 81,384 和 113,375 和 140,360 和 175,356 和 183,337 和 216,329 和 228,311 和 252,265 和 300。把每对数中的两个数平方,然后

加起来，它们的和都是 160 225。

137. 对节俭的一次研究

桑迪·麦卡利斯特太太若想赢得她那精明丈夫所承诺的第六份奖赏，她得从她的日常家用津贴中省出一笔数额巨大的钱来；而这笔津贴若要经得起如此的节省，它必须十分丰厚。这道题目要我们求出五个大于 36 的数，个数为这些数的小物件可以被摆放得形成一个正方形，形成一个三角形，形成两个三角形和形成三个三角形；在这四种情况中，所有的小物件都要用上。

每个三角形数都有这样的性质：把它乘以 8，再加上 1，结果是个奇平方数。例如，将 1、3、6、10、15 分别乘以 8，再加上 1，我们就得到 9、25、49、81、121，即奇数 3、5、7、9、11 的平方。因此，每当发生 $8x^2+1=$ 一个平方数的情况时，x^2 同时也是一个三角形数。上述情况在我们的趣题“黑斯廷斯战役”中曾谈到过。现在我仅仅是还将展示，当找到第一个解的时候，怎样毫无困难地求出其他的解。首先，有下面这些数字：

$$8\times 1^2+1=3^2$$
$$8\times 6^2+1=17^2$$
$$8\times 35^2+1=99^2$$
$$8\times 204^2+1=577^2$$
$$8\times 1189^2+1=3363^2$$
$$8\times 6930^2+1=19\,601^2$$
$$8\times 40\,391^2+1=114\,243^2$$

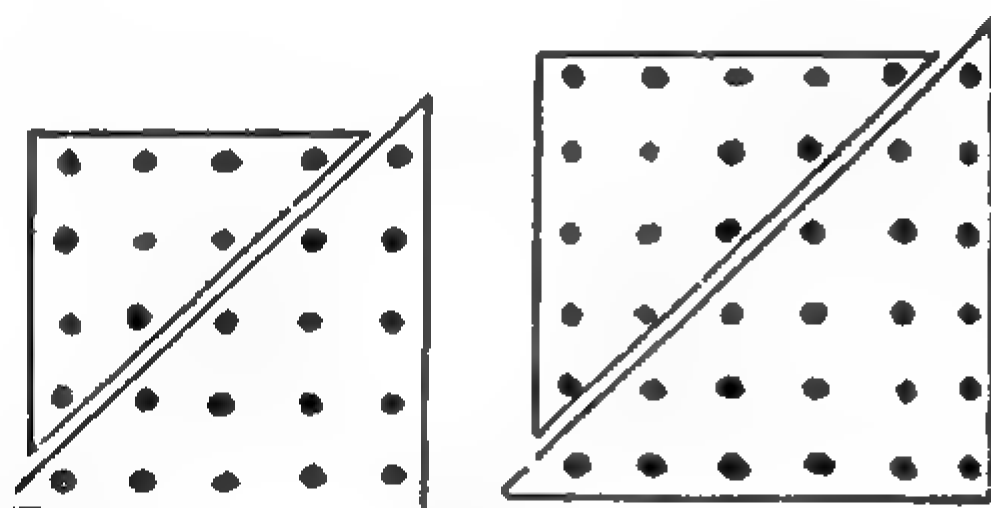
其中每对数依次是这样求出的：

$$(1\times 3)+(3\times 1)=6 \qquad (8\times 1)+(3\times 3)=17$$
$$(1\times 17)+(3\times 6)=35 \qquad (8\times 6)+(3\times 17)=99$$
$$(1\times 99)+(3\times 35)=204 \qquad (8\times 35)+(3\times 99)=577$$

等等。寻查上面式子中的数字,求法不言自明。

于是我们发现,36、1225、41 616、1 413 721、48 024 900 和 1 631 432 881 这些数将形成边长为 6、35、204、1189、6930 和 40 391 的正方形;而且它们还将形成边长为 8、49、288、1681、9800 和 57 121 的单一的三角形。这些边长可从上面第一组式子的最后一列这样得到:将这列中的数除以 2 并舍去余数即可。例如,17、99 和 577 的一半的整数部分就是 8、49 和 288。

我们求得的所有数都是既能形成两个三角形也能形成三个三角形,随你的意。下面这幅小示意图让你一目了然地看到,每个平方数都必定是两个三角形数之和,而且其中一个三角形的边长同相应正方形的边长一样,而另一个三角形的边长只是比前者小 1。



于是一个正方形总可轻而易举地分成两个三角形,而两个边长差 1 的三角形合起来总可形成一个正方形。在数字上这一点同样是十分清楚的,因为考察一下开头的几个三角形数——1、3、6、10、15、21、28,我们会发现,依次把一对对相邻的三角形数加起来,就得到了平方数序列——1、4、9、16、25、36、49,等等。

把我们的这些数分成三个三角形数的方法同样是直接的,完全用不着进行尝试。但是我必须让自己满足于给出实际数字,并且仅指出每个大于 6 的三角形数都能分成三个三角形数。我

给出这些三角形的边长，读者们将从我叙述这道趣题时所作的议论中知道怎样根据这些边长求出每种情况中筹码或钱币的枚数，并核对结果，如果他们想这样做的话。

枚数	正方形的边长	三角形的边长	两个三角形的边长	三个三角形的边长
36	6	8	6 + 5	5 + 5 + 3
1225	35	40	35 + 34	33 + 32 + 16
41 616	204	288	204 + 203	192 + 192 + 95
1 413 721	1180	1681	1189 + 1188	1121 + 1120 + 560
48 024 900	6930	9800	6930 + 6929	6533 + 6533 + 3267
1 631 432 881	40 391	57 121	40 391 + 40 390	38 081 + 38 080 + 19 040

或许我应该说明，最后两列中给出的摆放方式并不是摆成两个和三个三角形的唯一方式。还有其他的方式，不过只要一组数字就可完全满足我们的要求了。于是我们看到，麦卡利斯特太太要领到她那第六份的 5 英镑奖赏，她必须积攒到数目可观的 1 631 432 881 英镑。

138. 炮兵的困境

一些炮弹，我们既可以把它们铺在地上形成一个标准的正方形，也可以把它们堆成一个正四棱锥。题目要我们求出这批炮弹至少有多少颗。我将试着把这件事向仅是刚入门的人表示清楚。

1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	14	30	55	91	140

在这里的第一行中，我们按常规顺序放人自然数。第二行中的每个数是上面一行中从左端第一个数到它顶上那个数的

和。例如,1、2、3、4,加起来是10。第三行的构成方法与第二行完全一样。在第四行中,每一个数都是把它顶上那个数与此前那个数加起来而生成的。例如,4加上10生成14,20加上35生成55。好了,第二行中的数都是三角形数,这意味着颗数为这些数的炮弹可以铺在地上形成等边三角形。第三行中的数都可以形成我们的正三棱锥,而第四行中的数都可以形成正四棱锥。

于是,这个生成上述各数的过程,向我们证明了每个正四棱锥都是两个正三棱锥之和,其中的一个最底层每边炮弹颗数不变,另一个则少一颗。如果把上表延续到第二十四个位置,我们就会在第四行遇到4900这个数。它是70的平方,因此我们可以把这么多颗炮弹铺成一个正方形,并可以把它们堆成一个正四棱锥。这种把序列写下去直到我们遇上一个平方数的方法,并不需要什么数学头脑,然而它的作用是:显示了某些特殊难题的答案是可以被任何人所轻易获得的。事实上,我承认我在寻找除4900之外的满足这些条件的数上遭到了失败,我也没有找到一个严格的证明来证明4900是唯一的答案。这是一道难题,而且第二个答案如果存在(我并不相信这一点),那一定是个很大很大的数。

为了方便水平更高的数学家们,我这里补出正四棱锥数的一般表达式$\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$。为了让这个表达式同时也是一个平方数(1这个特殊情况排除在外),必须有$n = p^2 - 1 = 6t^2$,其中$2p^2 - 1 = q^2$(即"佩尔方程")。在我们上面那个解答中,$n = 24$,$p = 5$,$t = 2$,$q = 7$。

139. 荷兰人的妻子

在每笔交易中所付的钱数都是以先令为单位的平方数,因

为他们以每头猪1先令的单价买1头猪，以每头2先令的单价买2头，以每头3先令的单价买3头，等等。但是每位丈夫所付的钱都比他们各自的妻子多63先令，因此我们必须求出把63表示成两个平方数之差的方式有多少种。这里是仅有的三种合适方式：8的平方减去1的平方，12的平方减去9的平方，32的平方减去31的平方。其中1、9和31表示了各位女士所买猪的头数和为每头猪所付的先令数，而8、12和32是她们各自丈夫的类似情况。根据所给出的关于他们购猪情况的进一步信息，我们现在可以将他们如下配对：科尔内留斯和古尔特琳各买了8头和1头，埃拉斯和卡特琳各买了12头和9头，亨德里克和安娜各买了32头和31头。这些配对正确地表示了他们的婚姻关系。

在这里，读者可能很想知道，我们怎样来确定一个数表示为两平方数之差的方式最多有几种，以及我们怎样来求出这些具体的平方数。除了1、4和奇数之两倍以外的任何整数，都可表示为两个整数平方之差，其表示方式与把这个数分解为一对因数（计1为因数）的方式一样多。假定这个数是5940。其素因数分解式为$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$。这里的指数是2、3、1、1。对2的指数总是减去1，对所有其他的指数都加上1，于是我们得到1、4、2、2，这四个数的积的一半就是我们所要的把5940表示成两平方数之差的方式种数，即8。下面我们求出这八对平方数。由于5940是个偶数，我们首先把它除以4，得1485，它的八对因数分解是1×1485，3×495，5×297，9×165，11×135，15×99，27×55和33×45。每对中两因数之和与两因数之差就给出了所求的数。于是，1486的平方减去1484的平方是5940，498的平方减去492的平方也是5940，如此等等。在上面63的情况中，由于63是奇数，我们就立即对它进行因数分解，得1×63，3×21，7×9。然后我们求每对中两因数之和的一半与两因数之差的一半，这就给出

了 32 和 31,12 和 9,以及 8 和 1,正如在本题解答中所给出的。

这个问题的反问题——即当你已把一个数表示成两平方数之差时,求出这个数的因数——是没什么味道的。例如,上段最后一句中任何一对数的和与差,都会给出 63 的因数。每个素数(除了 1[①] 和 2)都能以一种方式且仅以一种方式表示为两平方数之差。如果一个数能以一种以上的方式表示为两平方数之差,那么它就是合数;而且,它既已如此表示,我们就能立即得到它的因数,正如我们已经看到的那样。费马在给梅森或弗雷尼克尔(Frénicle)的一封信中表明了我们怎样可以发现一个数是否能以一种以上的方式表示为两平方数之差,也就是说怎样可以证明一个数是素数。但是这个方法在用以处理大数时必然是很冗长的,不过在实际使用中它可以被大大缩短。在许多情况下这是目前已知对大数进行因数分解的最简短方法,而且我一直持这样的观点:费马利用这种方法在因数分解方面完成了某种为神秘所笼罩的历史功绩。

140. 求出埃达的姓

这些姑娘的姓名是埃达·史密斯、安妮·布朗、埃米莉·琼斯、玛丽·鲁滨逊和贝茜·埃文斯。

141. 星期六的购物

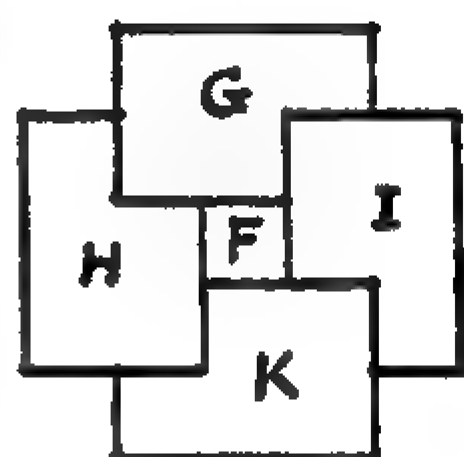
由于每个人所购买的东西其价值都是整先令,而且由于这伙人在出发时总共只拥有四十枚一先令的硬币,因此既没有理由说任何一位女士有着更小的零钱,也没有证据说她们实际上

① 现在数论中明确规定 1 不是素数也不是合数,当时这一点可能还不明确。——译者注

有着这样的零钱。既然如此，唯一合适的答案就是，这些女人的姓名分别为安妮·琼斯、玛丽·鲁滨逊、简·史密斯和凯特·布朗。现在你会发现，正好有八先令余下，这些硬币可以在这八个人中平分而不需要任何零钱。

142. 丝绸百衲被

我们的插图表明了割断这床百衲被的哪些针脚，以完整地得到正方形 F，和四块相同的东西，后者能拼成一个标准的希腊十字架。读者会从那篇文章中的图 13 知道怎样把这四块东西拼起来。



143. 十字架一个变两个

可以看到，一个十字架是完整地切割下来的，即图 1 中的 A。而标着 B、C、D 和 E 的四块则拼成了第二个十字架，如图 2 所示。它的大小与前一个完全一样。我把找出确定切割走向的最好方法这一愉快的任务留给读者自己去完成。注意万字饰再次出现。

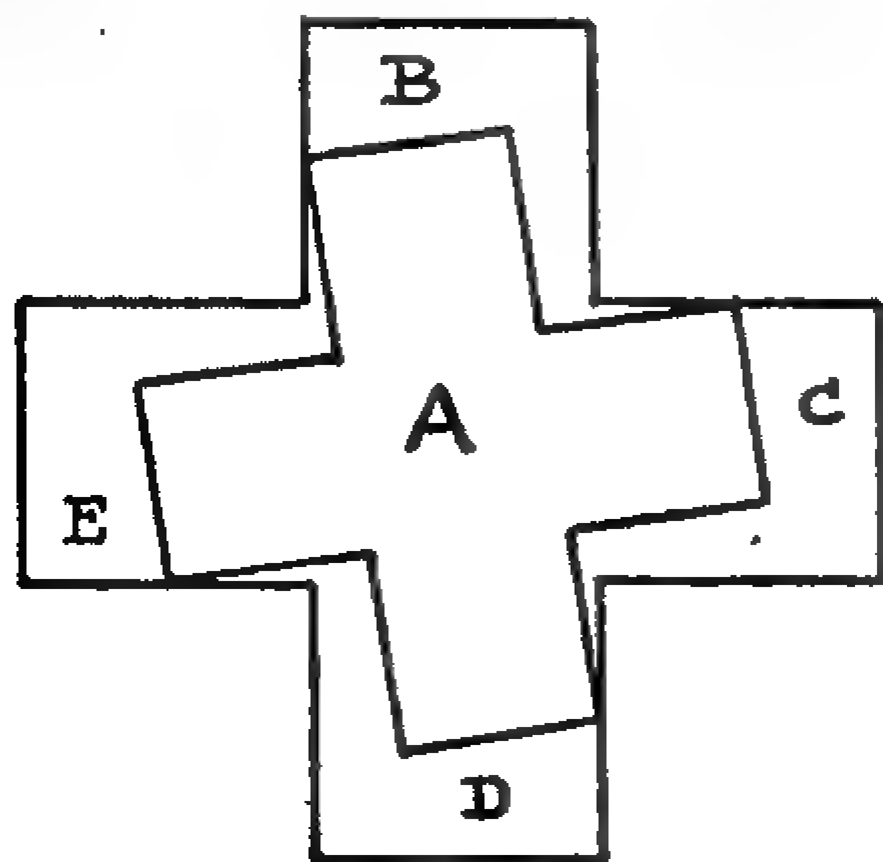


图 1

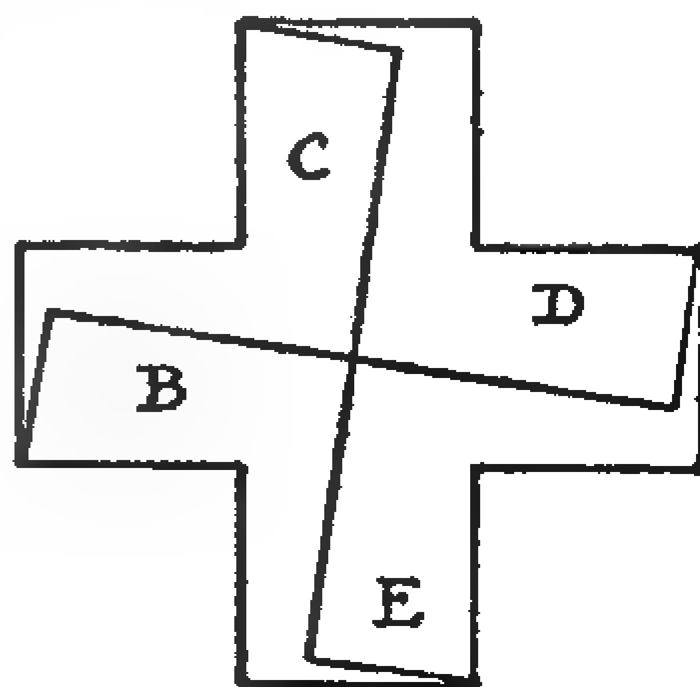
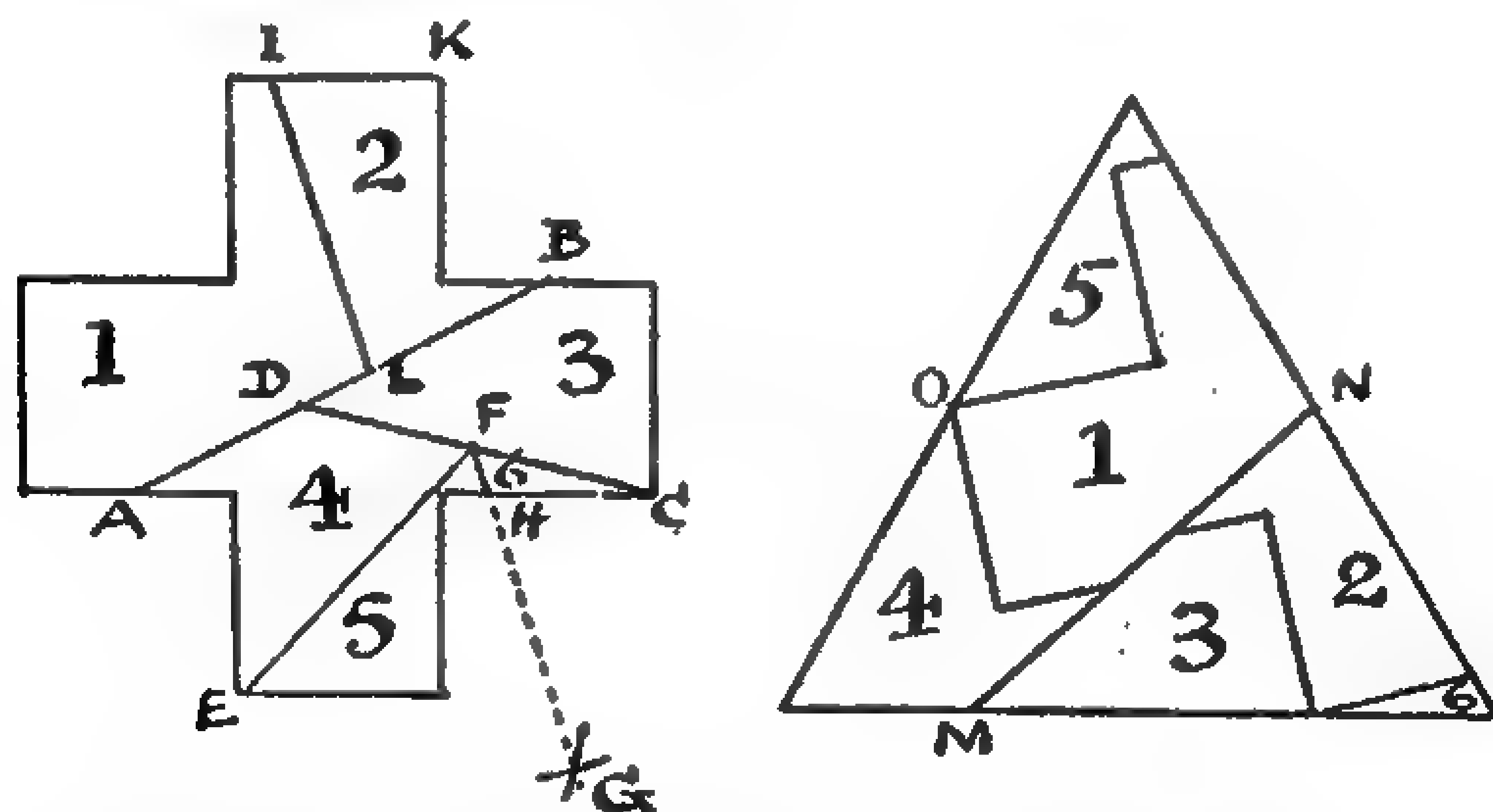


图 2

现在有道难题出现了:怎样用最少的切割块把一个希腊十字架变成三个?事实上,解决这个问题所用的切割块可以少到十三块。不过,据我所知,我的许多读者,以及资深的几何学家们,将很高兴做一些没有向他们宣布解答的题目。我暂且不揭开这个谜底。

144. 十字架与三角形

下图中线段 AB 相当于一个与这个十字架面积相同的正方形的边长。正如我说过的,我在其他地方已说明了怎样确定一个正方形与一个等边三角形面积相等。因此,求出与我们的十字架面积相等的三角形尺寸这个预备性问题,我就不需要再探讨了。我们假定已经把它求出来了,于是这问题就变为:我们怎样把其中的一个切割成块再拼成另一个?



首先作线段 AB,其中 A 和 B 分别是两条侧臂上两端点间的中点。其次作线段 DC 和 EF 都等于那三角形边长的一半。现在以 E 和 F 为圆心,以相同的半径作弧,交于 G,连 FG。最后使 IK 等于 HC,LB 等于 AD。现在如果我们作出 IL,那么它应平行于 FG。于是所有六个切割块都划分出来了。这些切割块拼拢起来

便形成一个标准的等边三角形，如第二幅图所示。或者我们可以先在我们的三角形中定出线段MN的走向，然后将点O[①]放在十字架中的点E上，并在十字架上转动三角形，直到线段MN平行于AB。于是切割块5就可以划分出来，随后其他各块也可相继划分出来。

我看到许多解答尝试都涉及这样一个假设：三角形的高度与十字架的高度正好相同。这是一个谬误——十字架总是高于同面积的三角形。

145. 折叠起来的十字架

首先把这十字架沿图1中的虚线AB折起来，于是你把它弄成了如图2所示的样子。然后把它沿虚线CD折起来(其中D当然是这十字架的中心点)，于是你得到了如图3所示的样子。再拿起剪刀，从G剪到F。于是剪成了大小和形状都一样的四片纸，它们可以拼拢起来，形成一个正方形，如图4所示。

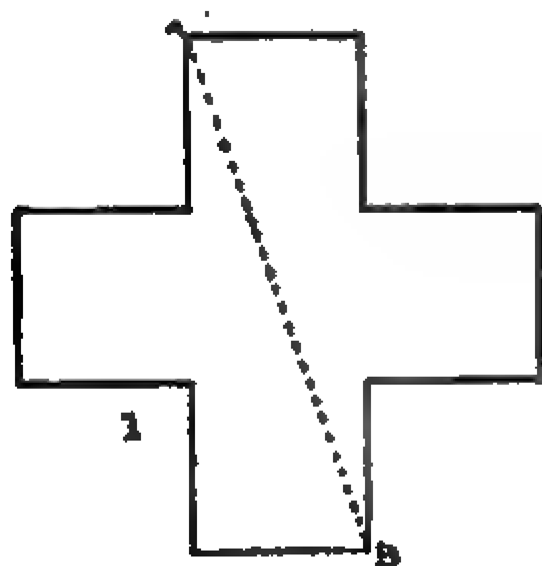


图1

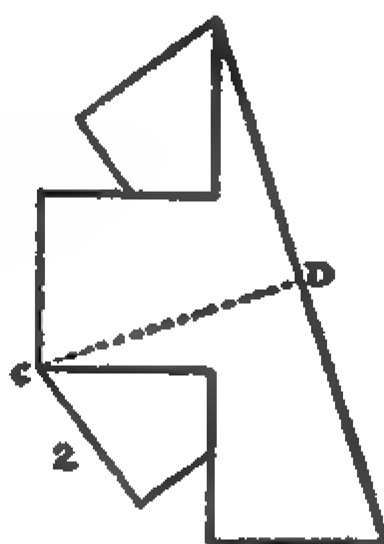


图2

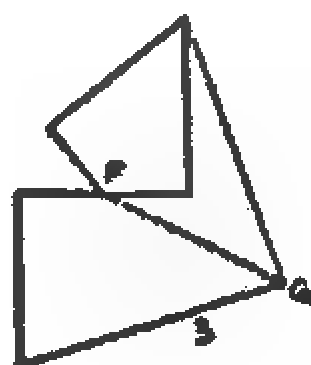


图3

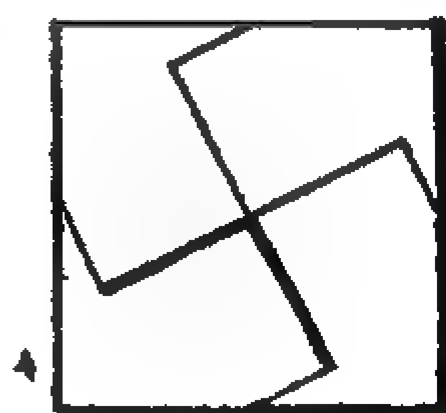
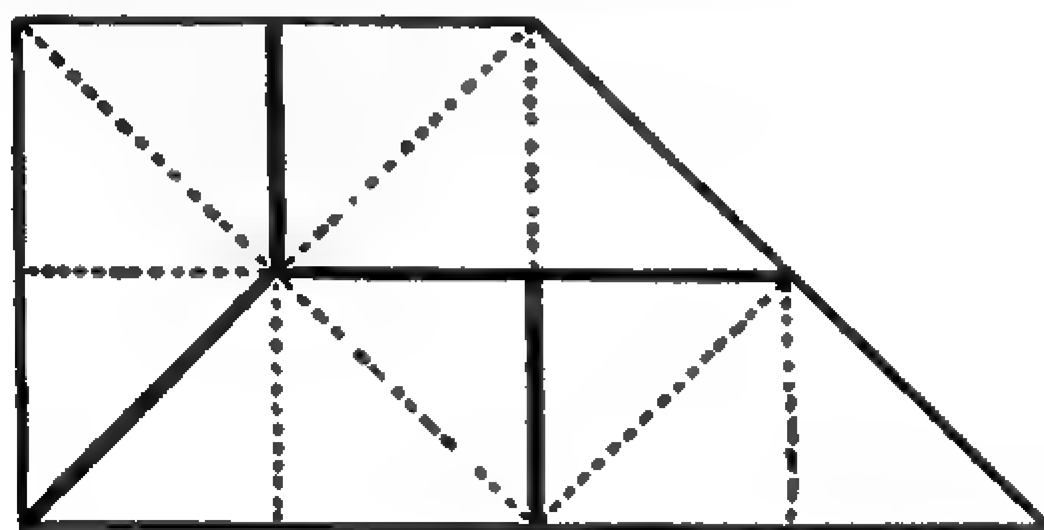


图4

① 原作此图中并没有标出点O的位置，现予以补上。易知点O为三角形此边上的中点。——译者注

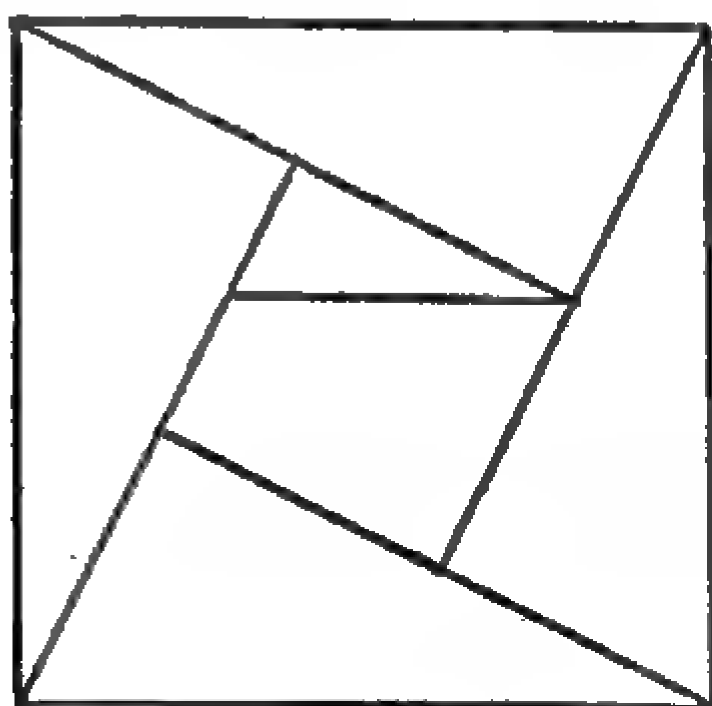
146. 一道容易的剖分趣题

这道趣题的解答如图所示。把这图形分成十二个相同的三角形，切割走向很容易发现。如粗黑线所示。



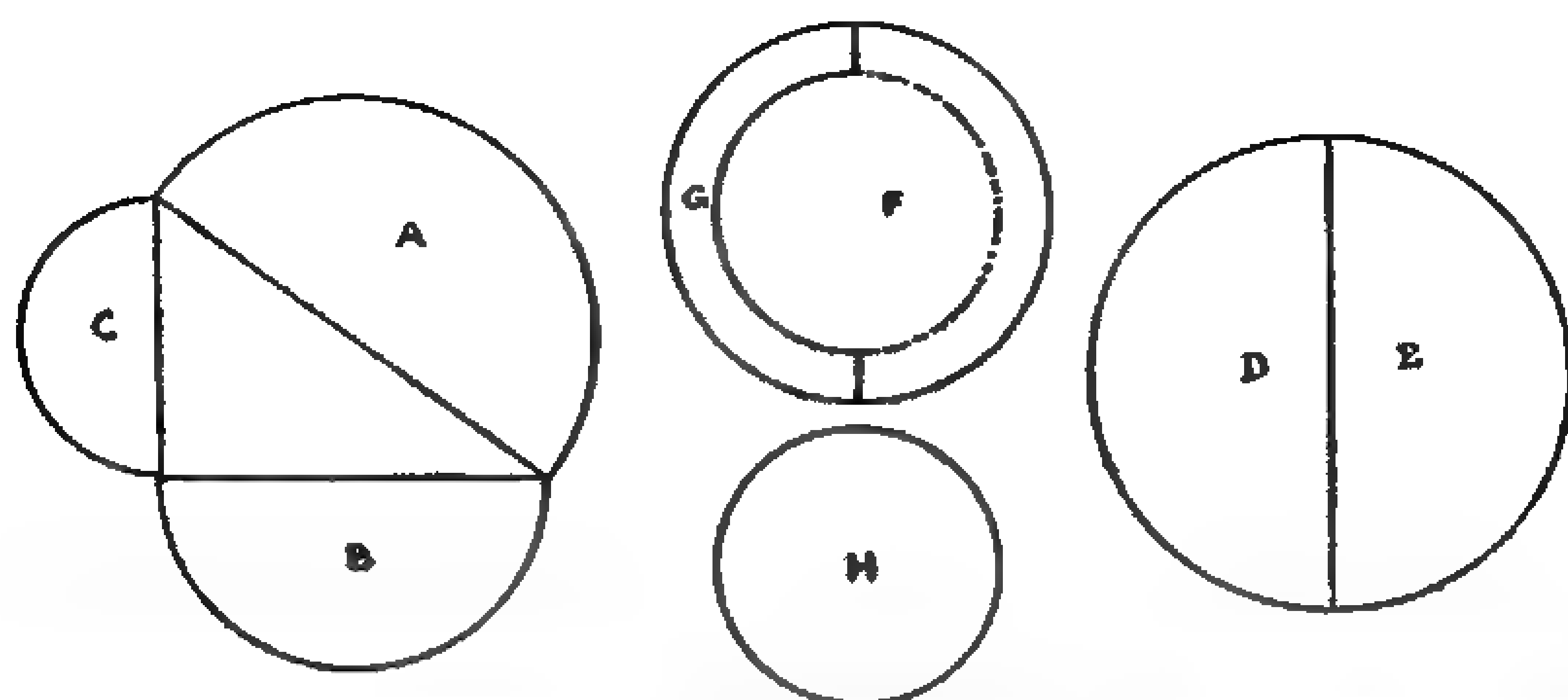
147. 一道容易的正方形趣题

这幅图不言自明，那五块中的一块被一分为二，拼成了一个正方形。



148. 小圆饼趣题

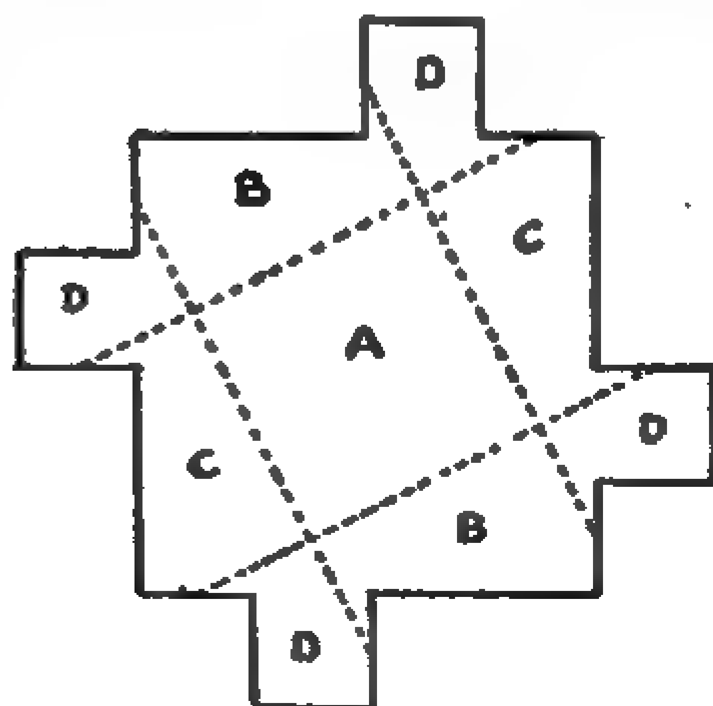
这道小圆饼趣题的机关在于这样一个事实：根据所给三个圆的相对大小，可知它们的直径将构成一个直角三角形，如图所示。由此推得，那两个较小的圆饼正好等于那个最大的圆饼。因此，如果我们把这个大圆饼给戴维和埃德加一人一半，即图中的



D 和 E,那么他们就得到了公平的份额 —— 每人得到这份糕点的四分之一。接下来,如果我们把最小的圆饼 H 以如图所示的方式放在余下那个圆饼的上面,并把它的周边勾出来,那么给弗雷德的那块 F,将等于给哈里的小圆饼 H 以及标着 G 的那块 —— 即另一小圆饼的框边的一半。这样,每个男孩得到的份额绝对相等,而且只需要切成五块。

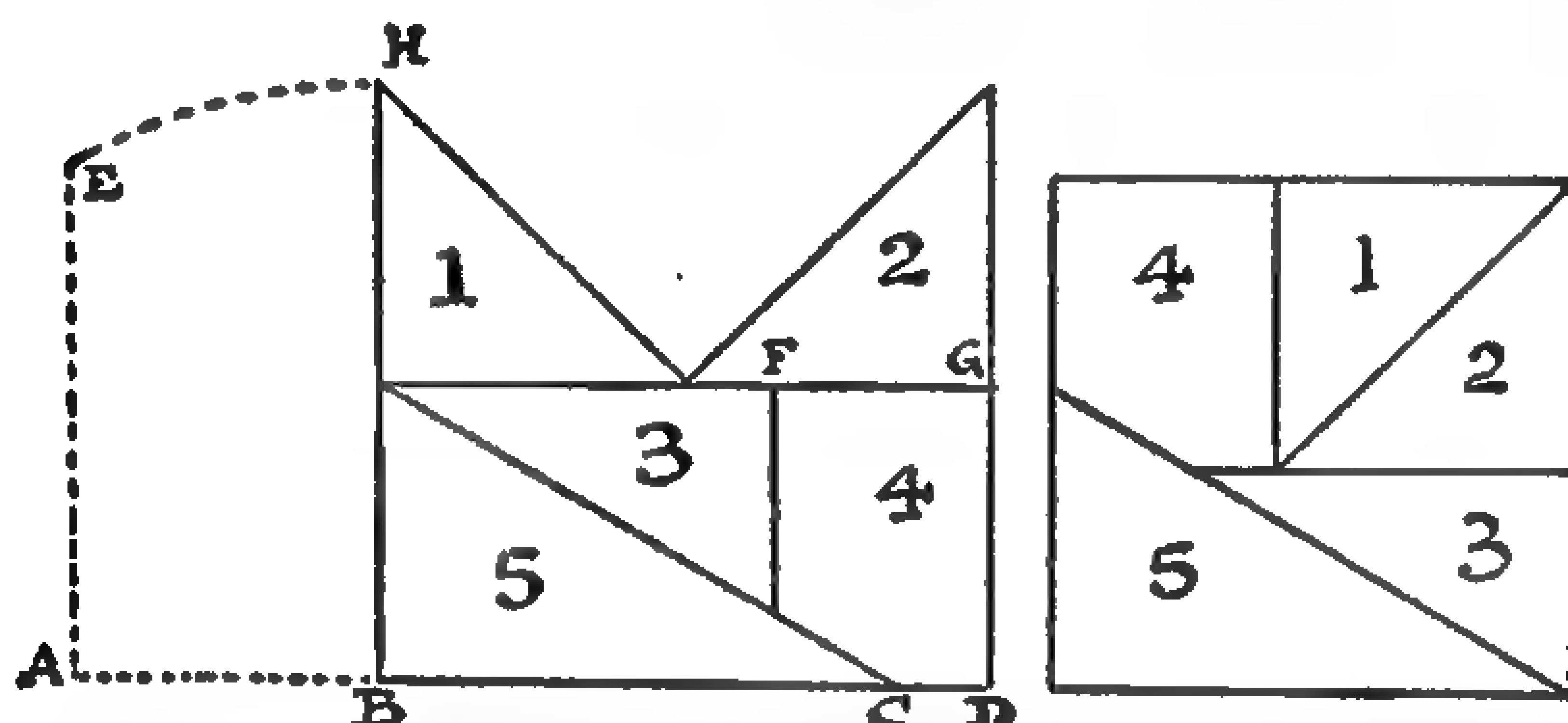
149. 分成许多方格的巧克力

正方形 A 完整保留;标着 B 的两块拼在一起,形成第二个正方形;两块 C 形成第三个正方形;而标着 D 的四块将形成第四个正方形。

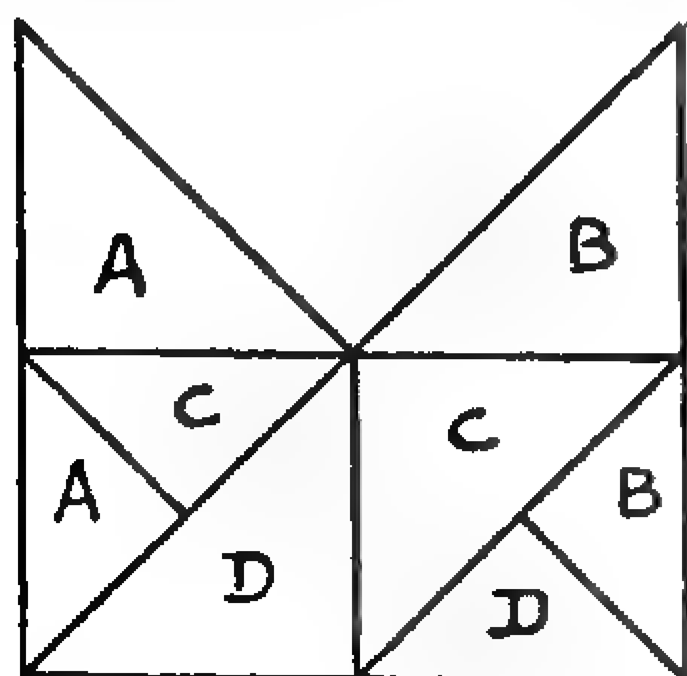


150. 剖分一个主教冠

下图显示了怎样切割成五块再拼成一个正方形。画上那些虚线，目的是要表明怎样确定点 C 和点 F—— 这是本题唯一的难处。AB 是 BD 的一半，而 AE 平行于 BH。把圆规的针尖放在点 B 作弧 HE，AE 将等于从 B 到 C 的距离。于是 FG 等于 BC 减去 AB。



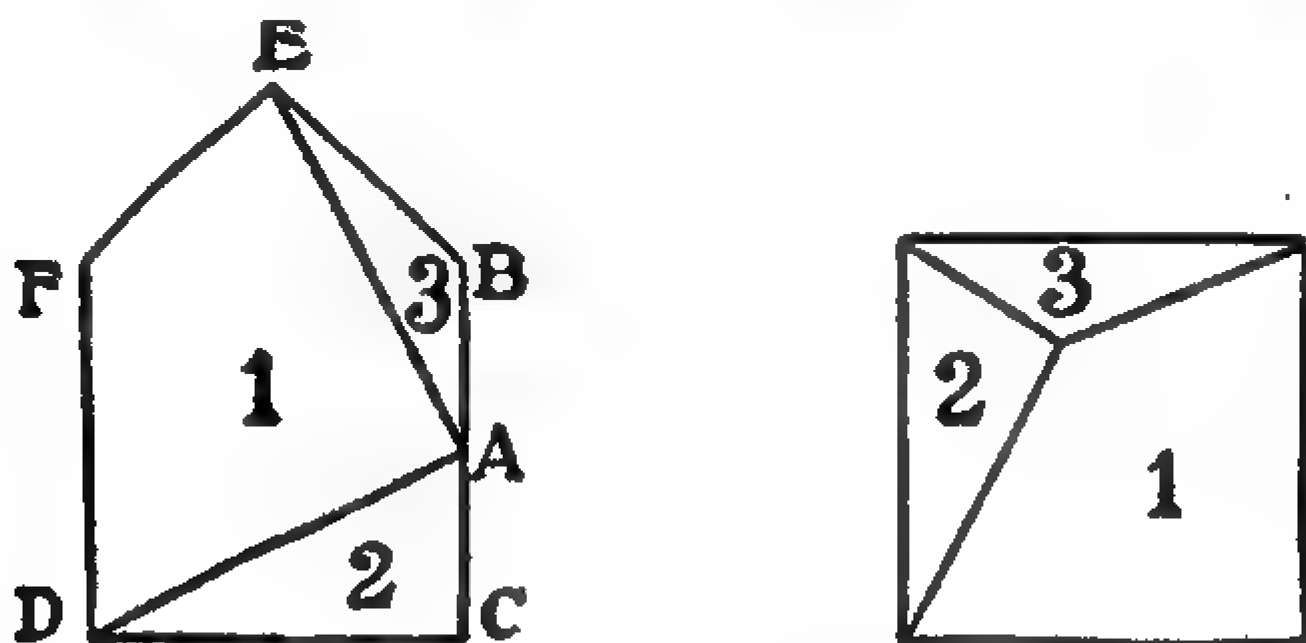
对于这道趣题(其附加条件是切割成大小和形状都相同的四个部分)，我没能追溯到比 1835 年更早的年代。严格地说，它取这种形式，是不可能有解答的。但是我给出一个老是被提到的答案，看来它令大多数人感到满意。



左边这个答案要求我们认为含有相同字母——AA、BB、CC、DD——的两个图形被“命悬一线”地连在一起，因此只算一块。对于几何学家来说，这很荒唐。这四个部分的面积是不相等的，除非它们每个都是由两块组成的。而如果我们使它们的面积相等，则它们的形状就不会相同。

151. 细木工的问题

没有比这道趣题的解答更简单的了——当你知道怎样做这件事的时候。然而它往往会使新手感到棘手，如果他想以最少的块数——三块来完成这件事的话。你要做的只是找到点 A，即 BC 的中点，然后从 A 切割到 D 和从 A 切割到 E。切割下来的三块于是就以所示的方式拼成了一个正方形。当然，原来图形的形状必须准确；例如三角形 BEF 正好是正方形 BCDF 的四分之一。从 B 到 D 和从 C 到 F 连直线，这一点就很清楚了。

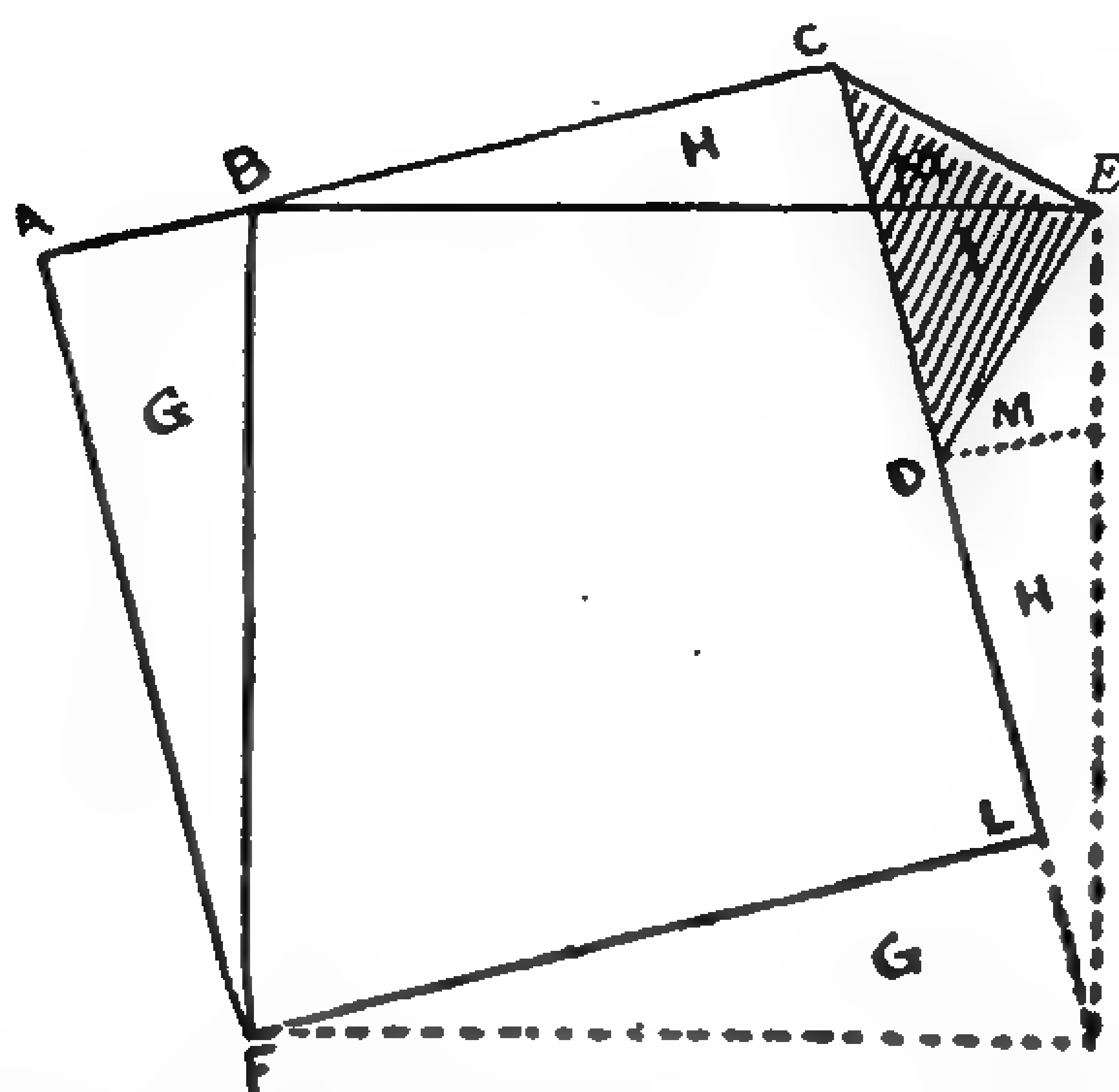


152. 细木工的又一个问题

关键是找出用一个正方形和一个“等腰直角三角形”来形成一个完整的正方形的一般规律。当然，这种被几何学家赋以如此动听名称的三角形，只不过是将正方形作对角划分而得到的“半正方形”。

这里，正方形和三角形的相对大小到底如何，绝对是无关紧要的。紧要的只是把这木板或材料切割成五块。

假设我们原来的正方形为下页插图中的 ACLF，而我们的三角形为阴影部分 CED。好，我们首先求出这三角形长边（CD）长度的一半，并把此长度在 AB 处量出。然后我们把三角形靠着



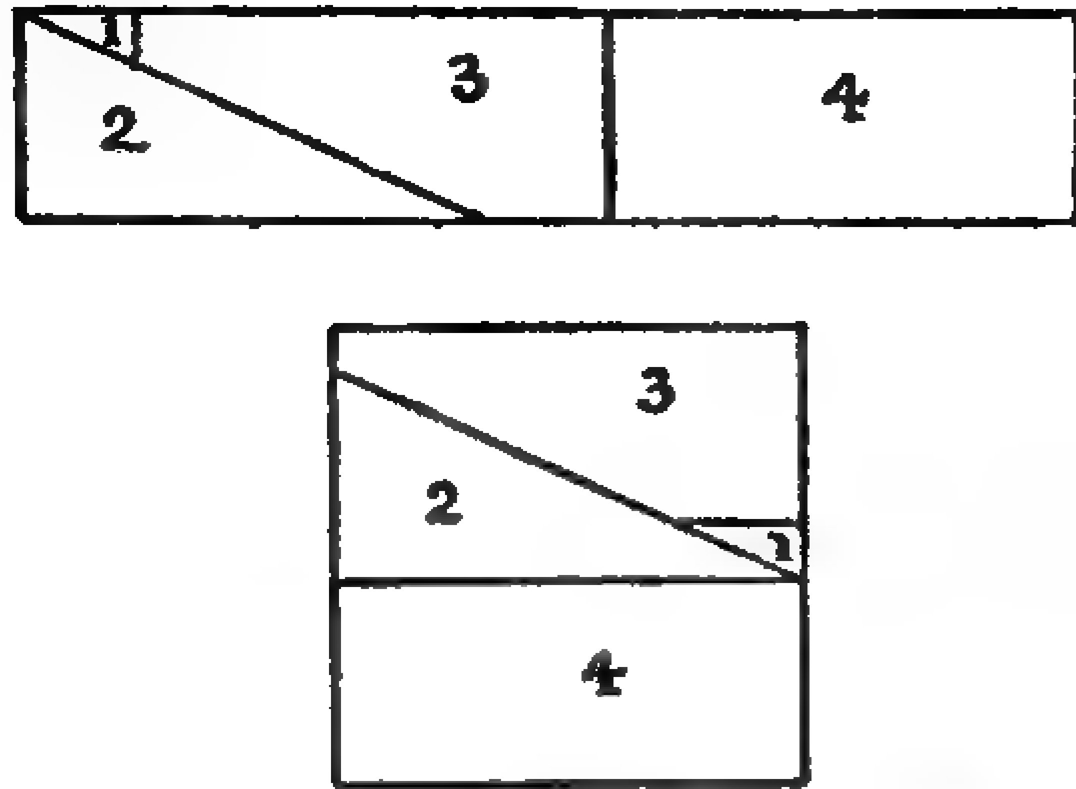
正方形放在现在的地方，做两个切割——一是从 B 到 F，另一是从 B 到 E。看起来可能很奇怪，要做的事全做好了！现在我们把切割块 G、H 和 M 移到它们的新位置上，如图所示，这就得到了那个完整的正方形 BEKF。

随便取两张正方形的纸，它们大小不同但必须是标准的正方形，将较小的正方形纸沿对角线对半剪开。现在按所示的方法操作，你会发现，只要如此这般地剪两下，那两张纸就可以合在一起形成一个大正方形，而且没有一块需要翻转。

说那三角形可以"在相对比例上稍大一些或者小许多"，目的是排除三角形面积大于正方形面积的情况。在这种情况下，必须切割成六块。如果三角形与正方形面积相等，有一个用三块的显而易见的解答——只要把那正方形沿对角线对半切开即可。

153. 一道裁剪趣题

下页插图显示了怎样剪成四块并用它们形成一个正方形的



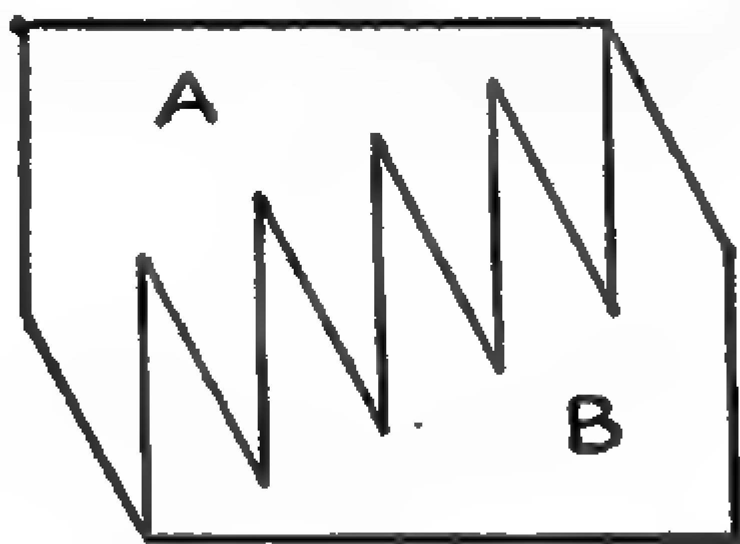
方法。首先求出正方形的边长(那矩形的长和宽的比例中项),于是这方法就十分清楚了。如果我们纸条的尺寸正好是 9 ×1,或16 ×1,或25 ×1,那么我们显然可以把它分别剪成3、4或5个矩形块而形成一个正方形。排除这些特殊的情况,一般的规律是:对于一纸条,如果其长度大于宽度之 n^2 倍而小于宽度之 $(n+1)^2$ 倍,那么它就可剪成 $n+2$ 块而形成一个正方形,而且其中有 $n-1$ 块是如图中块4那样的矩形。例如,对于一24 ×1 的纸条,它的长度大于宽度的 16 倍而小于宽度的 25 倍,因此可用6 块(这里 n 为4)做成此事,其中3 块是矩形。在 n 等于1 的情况下,矩形没有了,我们得到一个用三块的解答。当然,在这些限制以内,边长不一定要是有理数:这种解答是纯几何的。

154. 霍布森太太的地毯

由于我给出了这块遭毁损的地毯的全部尺寸,求出那正方形的准确大小是一件很容易的事。被剪去的两块如果拼在一起,会成为一个12 ×6 的长方形,这就给出它的面积为72(平方英尺或平方码,随我们高兴)。由于这块地毯原来完整时的尺寸为 36 ×27,故其面积为 972。于是,如果我们把被剪去部分扣除,就会

求出我们新地毯的面积为972减去72,即900。900是30的平方,于是我们知道,这块新地毯要成为一个标准的正方形,其尺寸必定为 30 × 30。这对我们走向解答具有极大的帮助,因为我们可以有把握地断定,那两条长为30的边都可以保持原封不动。

有一种用四块解决这道趣题的方法,非常容易。还有一种用三块的方法,也决不能说难。但正确的答案是,只用两块。

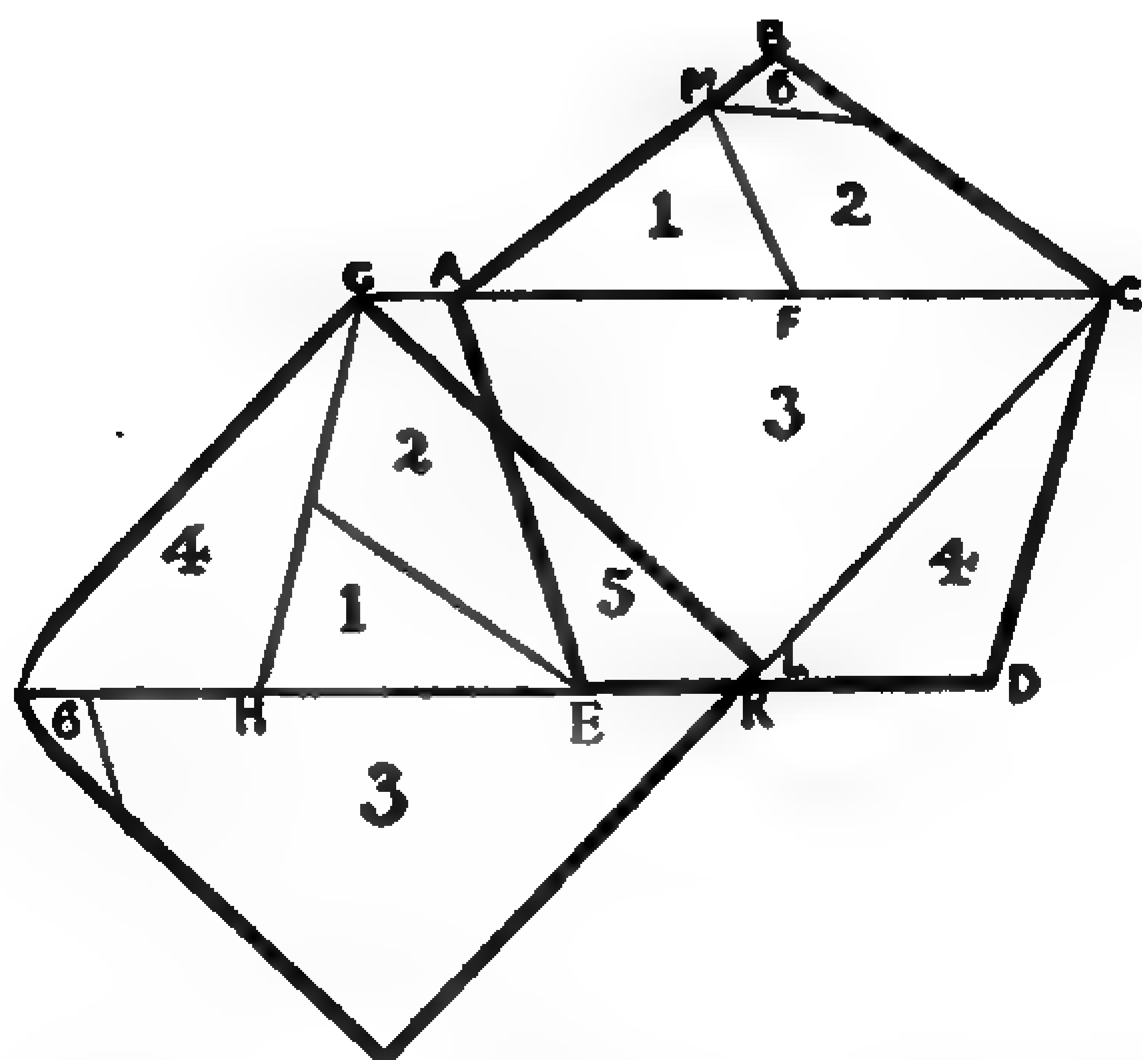


可以看出,在进行了如图所示的裁剪之后,如果我们把块 B 的齿状边缘下移一齿插入,那么这两部分就会拼拢,形成一个正方形。

155. 五边形与正方形

一个正五边形只要切割成很少的六块,就可以把这些切割块不作翻转地拼拢起来形成一个正方形,这一点我将在下面向你展示。直到最近,最好的答案还是七块 —— 这是好几年前由一位外国数学家保罗·比肖普(Paul Busschop)做出的解答。我们的解答是先形成一个平行四边形,由此再形成正方形。这一过程如下页插图所示。

正五边形为 ABCDE。通过切割 AC 和切割 FM(F 是 AC 的中点,M 与 A 的距离等于 F 与 A 的距离),我们得到两个切割块,可以把它们放到 GHEA 的位置上,形成平行四边形 GHDC。然后我们求出这平行四边形的边长 HD 和高的比例中项。由此我们标

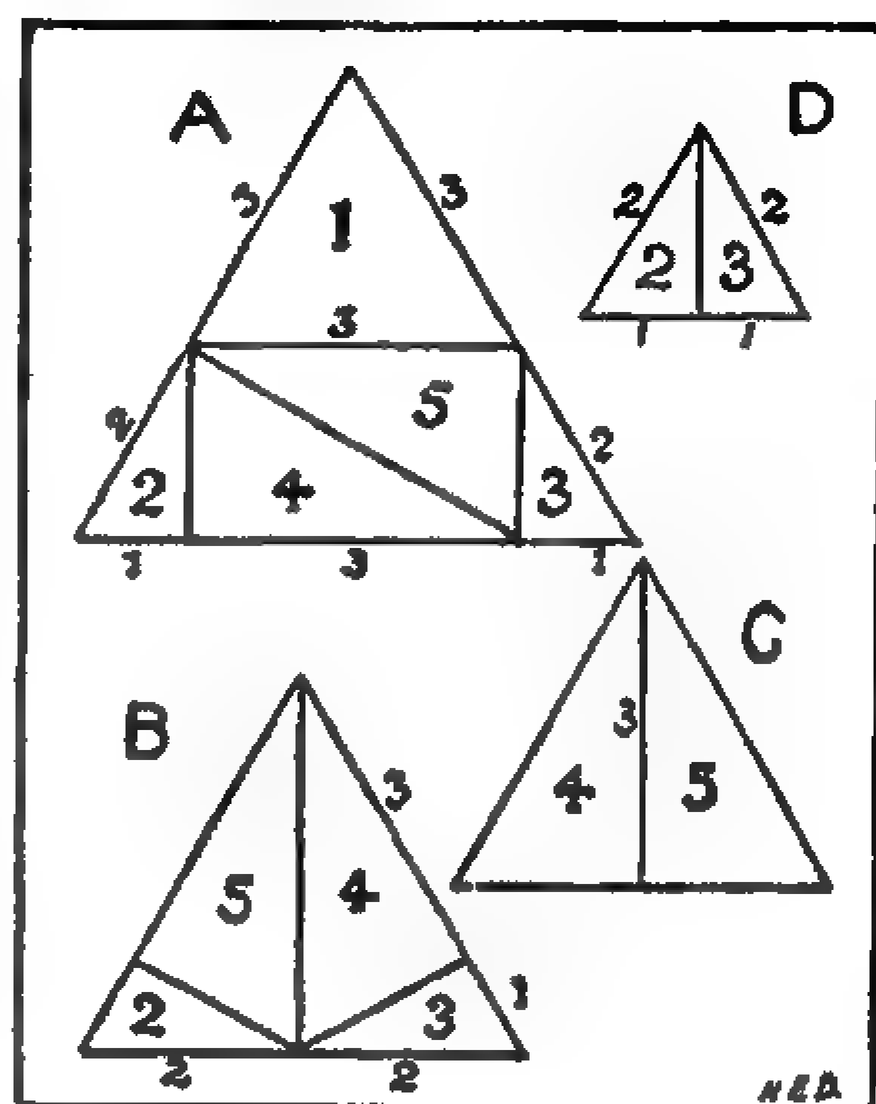


定 K 点,使 C 到 K 的距离等于这个比例中项。连接 CK,由 G 作 KC 的垂线 GL。余下的事情很容易,而且相当显然。可以看到,这六个切割块既可以拼成正五边形,也可以拼成正方形。

我收到过自称是只用五块的解答,但是那方法基于一个相当巧妙的错误,即正五边形的对角线的一半加上其边长的一半等于同面积正方形的边长。我说它巧妙,是因为这是一个误差极小的近似,可以骗过眼睛,而且很难显示出它的不准确性。我不知道这个奇特的近似以前已引起了人们的注意。

另一封来信把正五边形边长的 $1\frac{1}{4}$ 作为他正方形的边长。事实上,这个比例是个无理数。我计算了一下,如果正五边形的边长是 1—— 英寸、英尺,或其他什么 —— 那么同面积正方形的边长就近似于 1.3117,或者说大约 $1\frac{3}{10}$。因此我们只能期待用几何方法来解决这道趣题。

156. 被剖分的三角形



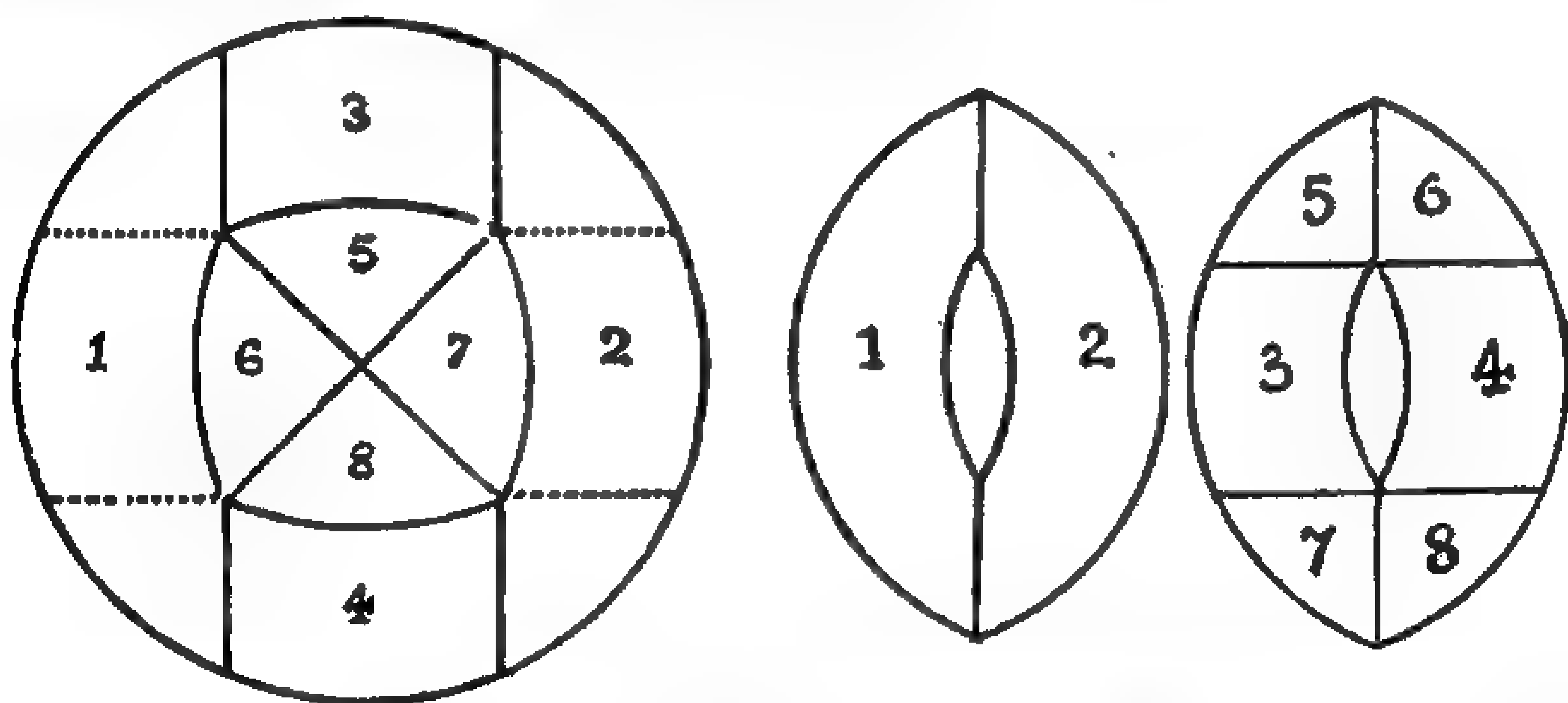
图A是我们原来的三角形。我们假定它每边的长度为5英寸(或5英尺)。如果对于任意的一个等边三角形,作一个平行于底边的切割,取走其底部的一块,那么余下的部分总是一个等边三角形。于是我们首先切下块1,得到一个每边长度为3英寸的三角形。求出图A中其他切割走向的方法可从图中很容易看出。

好,如果我们要两个三角形,那么块1就是其中一个,而块2、3、4和5拼拢起来形成另一个,如图B所示。如果我们要三个等边三角形,那么块1是一个,块4和5拼成第二个(如图C所示),块2和3拼成第三个(如图D所示)。在图B和图C中,块5翻了个身,但是对此不能有任何异议,因为没有禁止这样做,而且这一点儿也不违背这道趣题的原意。

157. 桌面与凳面

我在描述这道小趣题时,心中想做的一件事是,指出“卵形”(oval)这个词所传递的意思不明确。虽然这个词源自拉丁语ovum,蛋,但是我们所理解的蛋形(一头比另一头小)只是卵形的许多形式之一。尽管有些蛋在形状上呈球形,但球或圆绝对肯定地不是卵形。如果我们说的是椭圆——一种圆锥曲线——

那么我们就相对地可以高枕无忧，但是在这儿我们必须小心，不要犯错。我回想起在几年之前，有一位利物浦的市政会委员，他对家禽饲养的无知导致他用"母鸡"(hen) 这个词代替了"家禽"(fowl) 这个词。他说："先生们，我们必须记住，虽然每一只公鸡都是母鸡，但并非每一只母鸡都是公鸡！" 同样，我们必须时刻注意，虽然每一个椭圆都是卵形，但并非每一个卵形都是椭圆。正确的说法是，卵形是一种狭长的用曲线围成的图形，即它有两个不相等的直径，且被一条首尾相接的曲线所围。这包括了椭圆，但是所有以任何方式与卵形相近的并不一定具有上述性质的其他图形，也为"卵形" 这个术语所涵盖。例如，我在下面给出的我们这道趣题的解答，就涉及尖顶的"卵形"，即建筑师们所熟知的"尖椭圆光轮"(vesica piscis)。



在桌面上给出虚线是为了更清楚些，切割是沿着其他的实线进行的。可以看到，这八个切割块拼成了两个大小和形状完全同样并带有同样手孔的凳面。这两个手孔比那位校长凳面上的稍长一点儿，但要窄得多了，因此面积也小得多。当然，块 5 和 6 可以作为一块而切下 —— 块 7 和 8 亦如此 —— 这使得总共只是六块。但是我希望与原来故事中的块数保持一致。

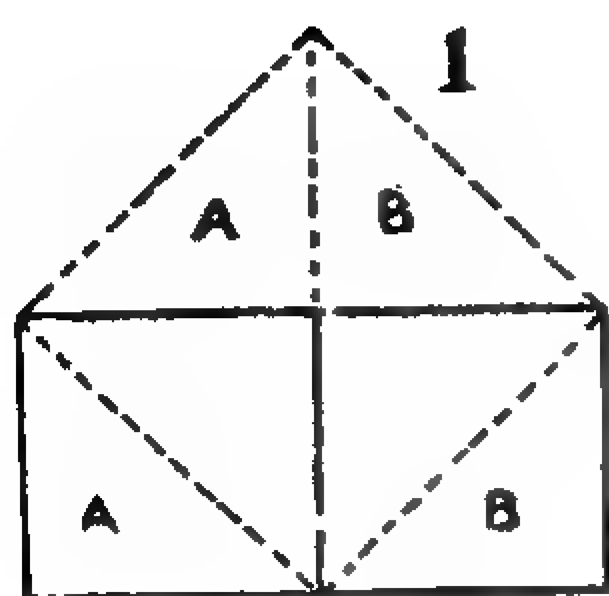
我把上述趣题首先发表在伦敦的一家报纸上，前来竞答的，竟没有一个是正确的，但是有一位躺在医院里的男士进行了一次想法巧妙、做法利索的尝试，并附上了下述注记：“这儿没有圆规，我不得不临时拼凑了一副。我用了一把小铅笔刀，从一捆柴中取了一小段木头，从一台玩具发动机上取了一块马口铁，再加上一根镀锡平头铁钉，从一枚发夹上拆下的两个部分则用作针尖。它们组成了一副相当耐用的圆规，我将把它们保存起来，作为你这道趣题的纪念品。”①

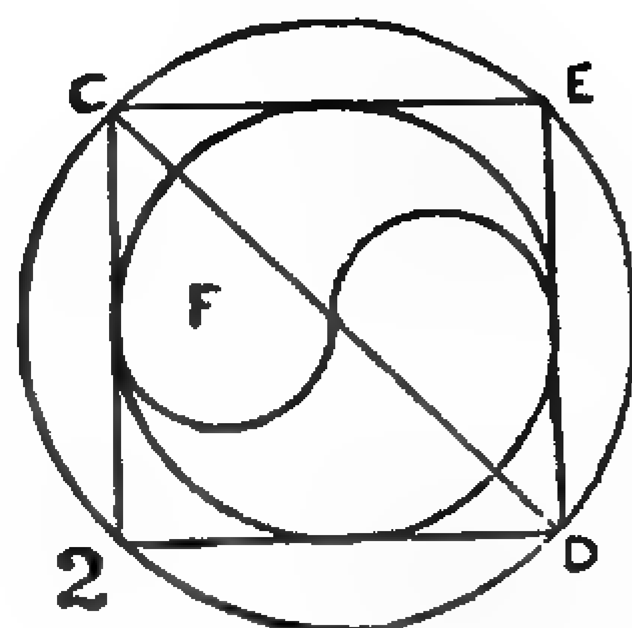
158. 伟大的太极图

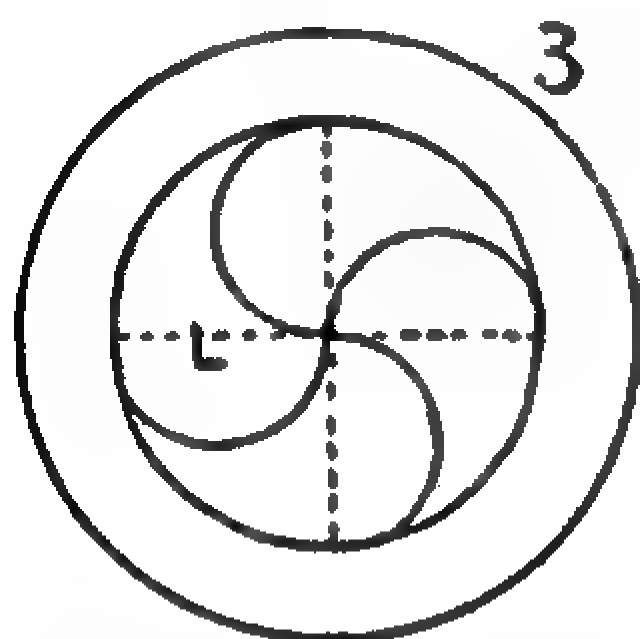
圆的面积之比就是它们直径的平方之比。如果你一个圆的直径为 2 英寸，另一个圆的直径为 4 英寸，那么一个圆的面积就是另一个圆的四倍，这是因为 4 的平方是 2 的平方的四倍。现在我们看图 1，我们看到，两个相等的正方形是怎样被切割成四块再拼成一个大正方形的。由此很容易看出，任何一个正方形的面积，都是以其对角线为边的那个正方形的面积的一半。在图 2 中，我引进了一个经常出现在太极图古画中的正方形，这就是我认为这个标志具有数学意义的理由，因为可以发现，它呈现了这样一个事实：外环（或称圆环）的面积正好等于内圆的面积。比较图 2 和图 1，你会看到，由于以直径 CD 为边的正方形在面积上两倍于以内圆直径（即 CE）为边的正方形，因此大圆的面积两倍于小圆的面积，于是圆环的面积正好等于内圆的面积。这就回答了我们的第一个问题。

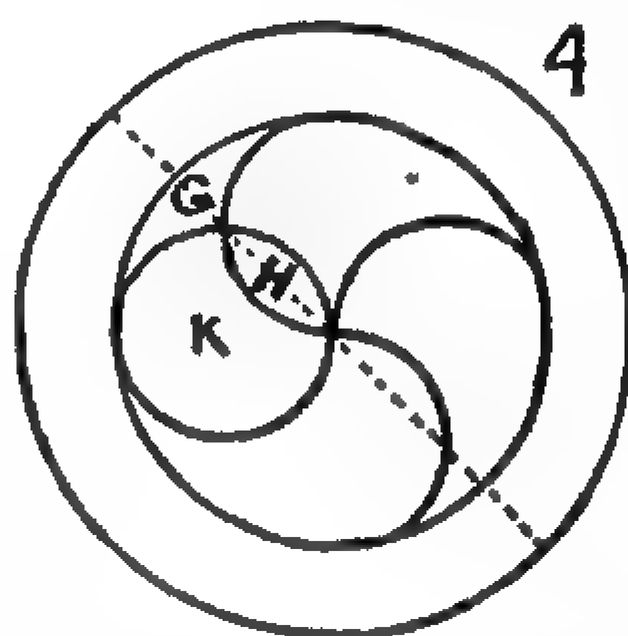
在图 3 中，我表明了第二个问题的简单解答。它显然是正确

① 对本题感兴趣的读者可参见本系列《萨姆·劳埃德的数学趣题续编》中的第 60 题，那儿还有一种解法。—— 译者注







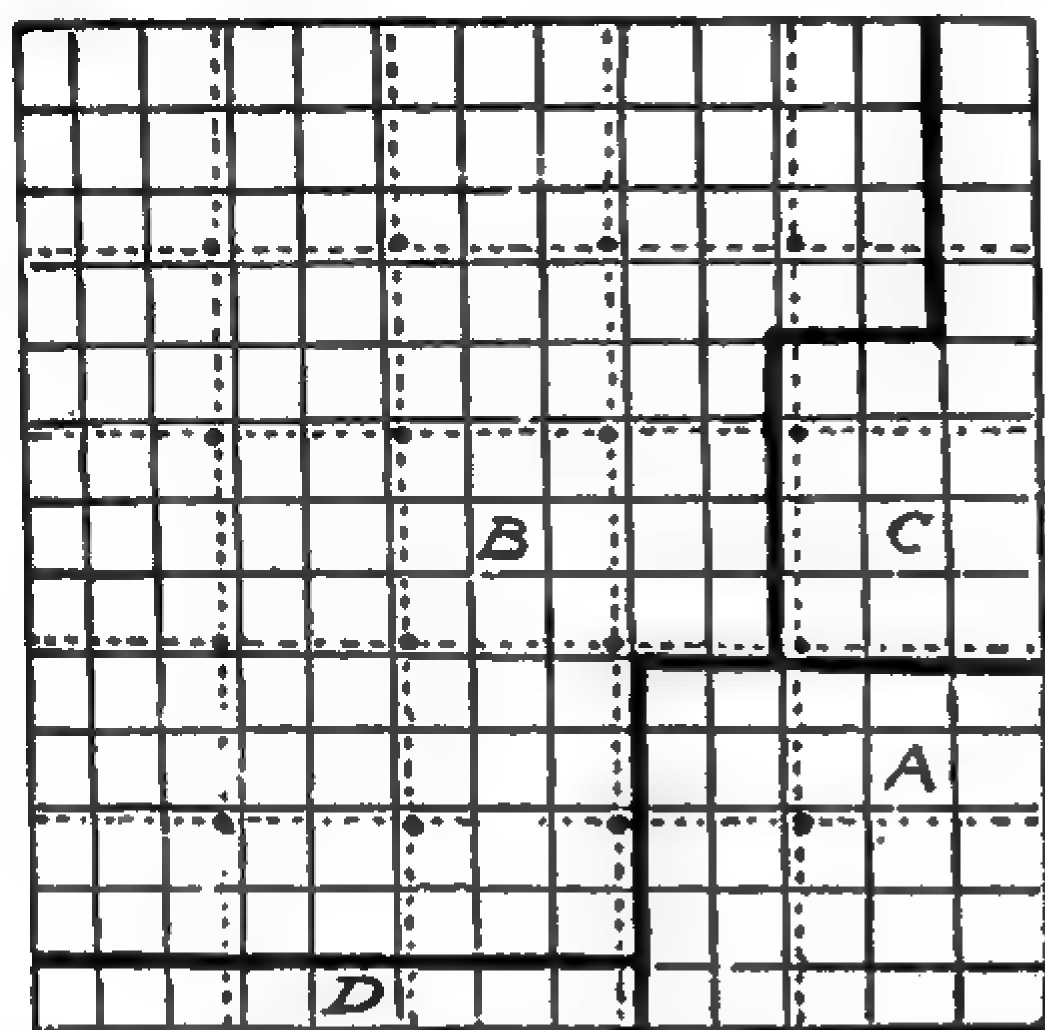


的，而且可通过把各部分切割下来再予以叠置的方法给出证明。虚线也是用来使这一点变得明显的。第三个问题是通过沿图 2 中的 CD 作切割而解决的，但是还需要证明块 F 确实是“阴”或“阳”的一半。这个证明我们在图 4 中进行。圆 K 有那个包含“阳”和“阴”的圆的四分之一面积，这是因为它的直径正好是后者直径的二分之一。我们知道，图 3 中的 L 也有那个圆的四分之一面积。因此很显然，G 正好等于 H，于是 G 的一半等于 H 的一半。这使得虽然 F 与 L 相比缺少了一部分，但它从 K 中取来了同样面积的部分，从而 F 一定是“阴”或“阳”的一半①。

① 这里的问题(2)和(3)，在本系列《萨姆·劳埃德的数学趣题续编》的第 62 题中作为问题(1)和(2)而提出，但对问题(2)(即这里的问题(3))的解答不够详尽。——译者注

159. 正方形装饰板

任何平方数都可以用无穷多种方式表示成两个平方数之和[①]。当前这道趣题的解答就是这条规律的一个简单演示。这是一种我们给出了实际尺寸的情况。



在这道趣题中，我暂不理会我们那个正方形的已知尺寸，而是从假设其尺寸为 $13n \times 13n$ 出发做下去。n 的值我们可在以后确定。将这正方形以如图所示的方式划分成 169 个方格（其中虚线表示原来的标示线）。由于 169 是两个平方数 144 和 25 的和，我们将着手把这块装饰板分成两个尺寸分别为 12×12 和 5×5 的正方形。由于我们知道可以把一个正方形剖分成四块而拼成两个正方形，因此我们寻找一个剖分成这个块数的解答。图中的粗黑线表明了切割应在何处进行。那个 5×5 的正方形是完整地切割下来的，而另一个较大的正方形则由其余的 B、C、D 三块拼

① 这里的"两个平方数"，包括有理数的平方。—— 译者注

成。读者可以轻易地把它们拼拢起来。

好，n 显然是一英寸的$\frac{5}{13}$。于是我们的大正方形一定是$\frac{60}{13}$英寸×$\frac{60}{13}$英寸，而我们的小正方形一定是$\frac{25}{13}$英寸×$\frac{25}{13}$英寸。$\frac{60}{13}$的平方加上$\frac{25}{13}$的平方是25。因此这个正方形只要切割成四块就能拼成两个尺寸让人知道的正方形，而且那十六颗钉子都被绕开了。

这儿是求出两个平方数使其和等于给定平方数（设为 a^2）的一般公式。对于我们这道趣题的解答，$p=3$，$q=2$，而 $a=3$。

$$\frac{2pqa}{p^2+q^2}=x;\quad \frac{\sqrt{a^2(p^2+q^2)^2-(2pqa)^2}}{p^2+q^2}=y\text{①}。$$

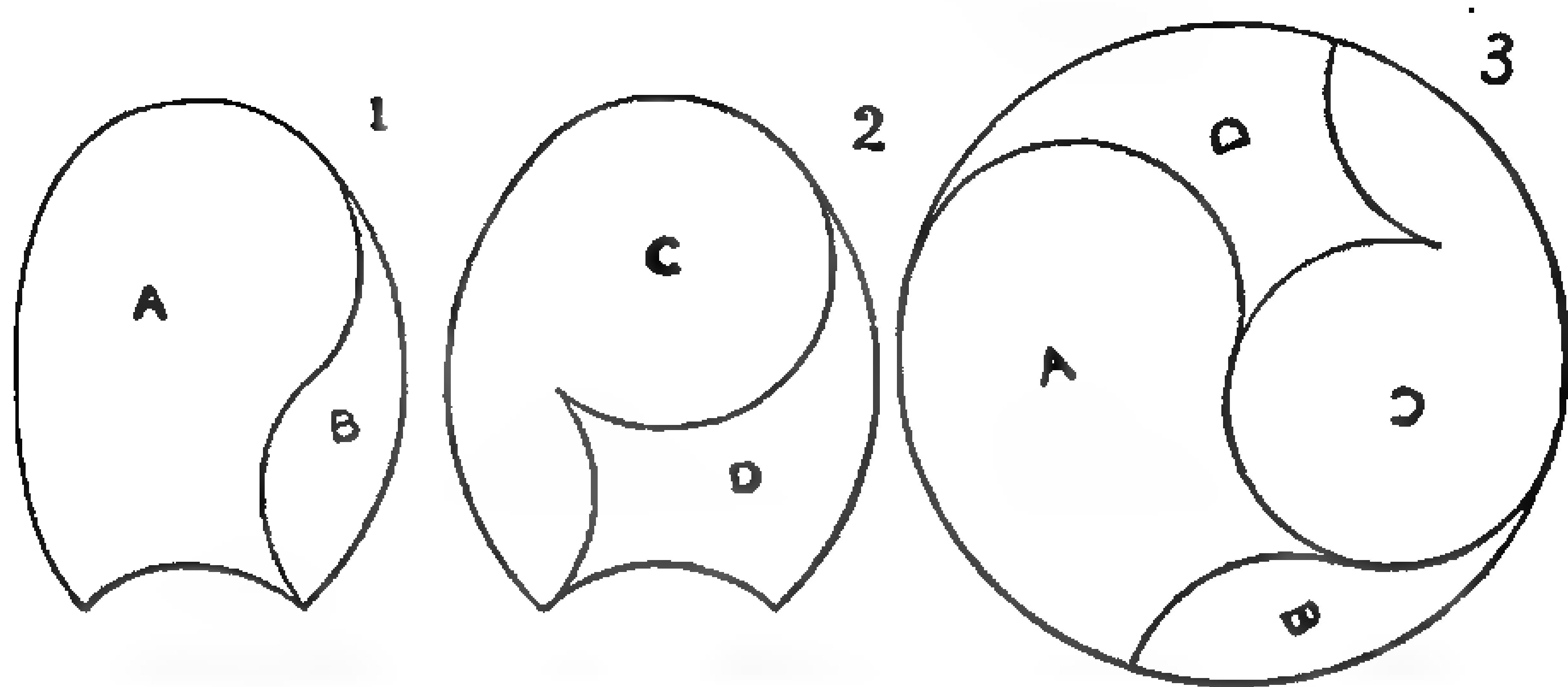
这里 $x^2+y^2=a^2$。

160. 两块马蹄铁

这道趣题要将两个马蹄铁图形（包括轮廓线以内的马蹄部分）切割成四块，每个马蹄铁图形两块，再拼拢起来形成一个标准的圆。它还规定这四块的形状要各不相同。事实上，这道趣题就是基于蕴含在那个奇特的中国标志太极图里的原理（参见第158题）。

下页插图给出了这道题目的正确解答。可以注意到，图1和图2被切割成所要求的四块，形状各不相同，它们拼拢起来形成了表示在图3中的那个标准的圆。还可以进一步观察到，来自一

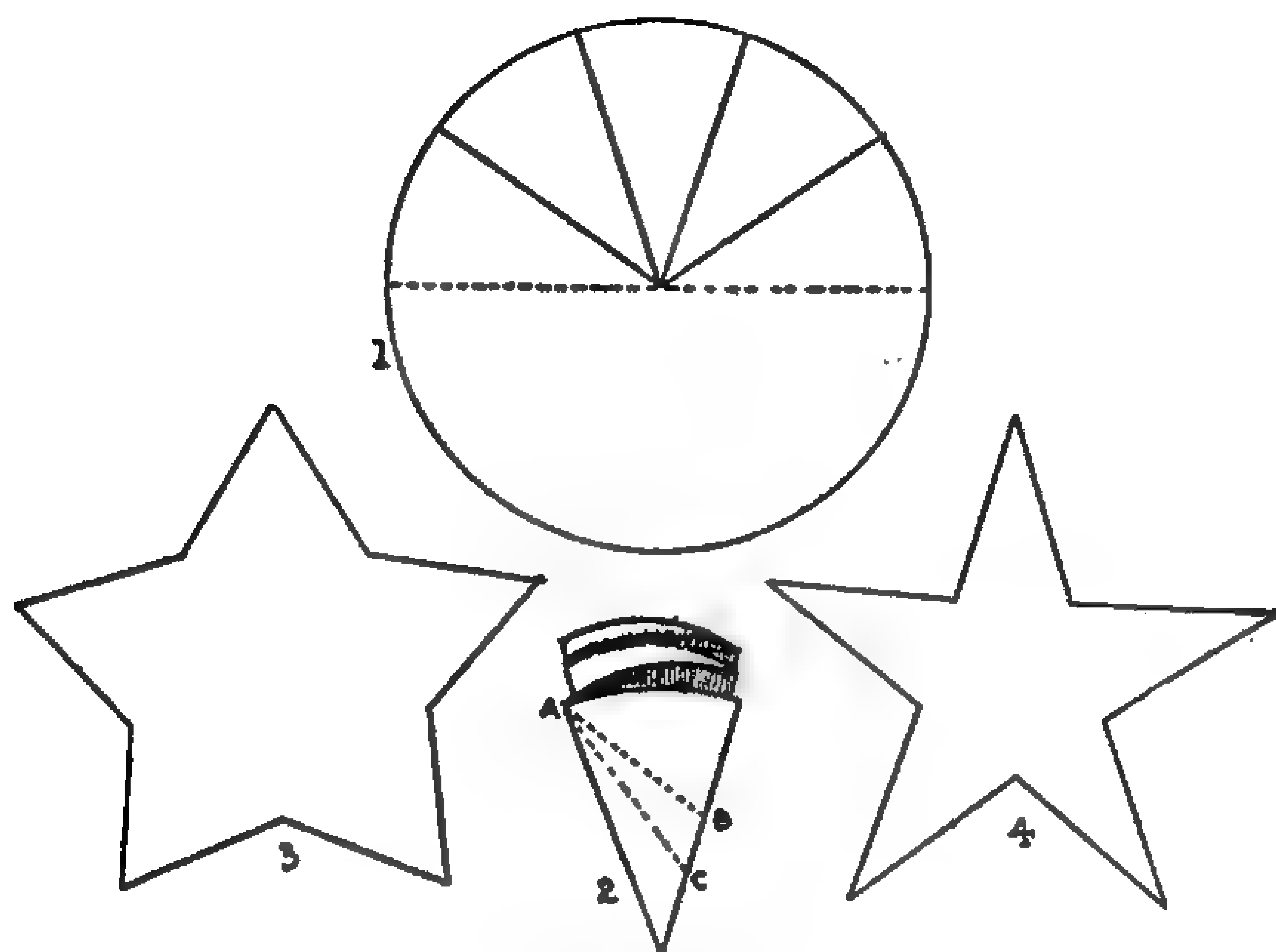
①此式显然可写成$\frac{|p^2-q^2|a}{p^2+q^2}=y$。—— 译者注



个马蹄铁图形的 A、B 两块，和来自另一个图形的 C、D 两块，各自形成了这个圆的完全相同的两半 —— 那伟大的太极图的"阴"和"阳"。可以看到，根据这圆来确定马蹄铁图形的大小，比根据马蹄铁图形来确定圆的大小要容易，但是如果你知道了马蹄铁图形的长边曲线就是你那个圆的圆周的一部分，后者也没什么困难了。B 与 D 之差具有启发性，而且这思想对于所有把切割块形状必须不一样作为一个条件的情况都是有用的。要形成 D，我们只要把一个形状对称的块，即一个曲边正方形，加到 B 上去。因此，让 B 或者让 D 转过 90°，再放到新的位置上去，产生的结果一定是完全一样的。

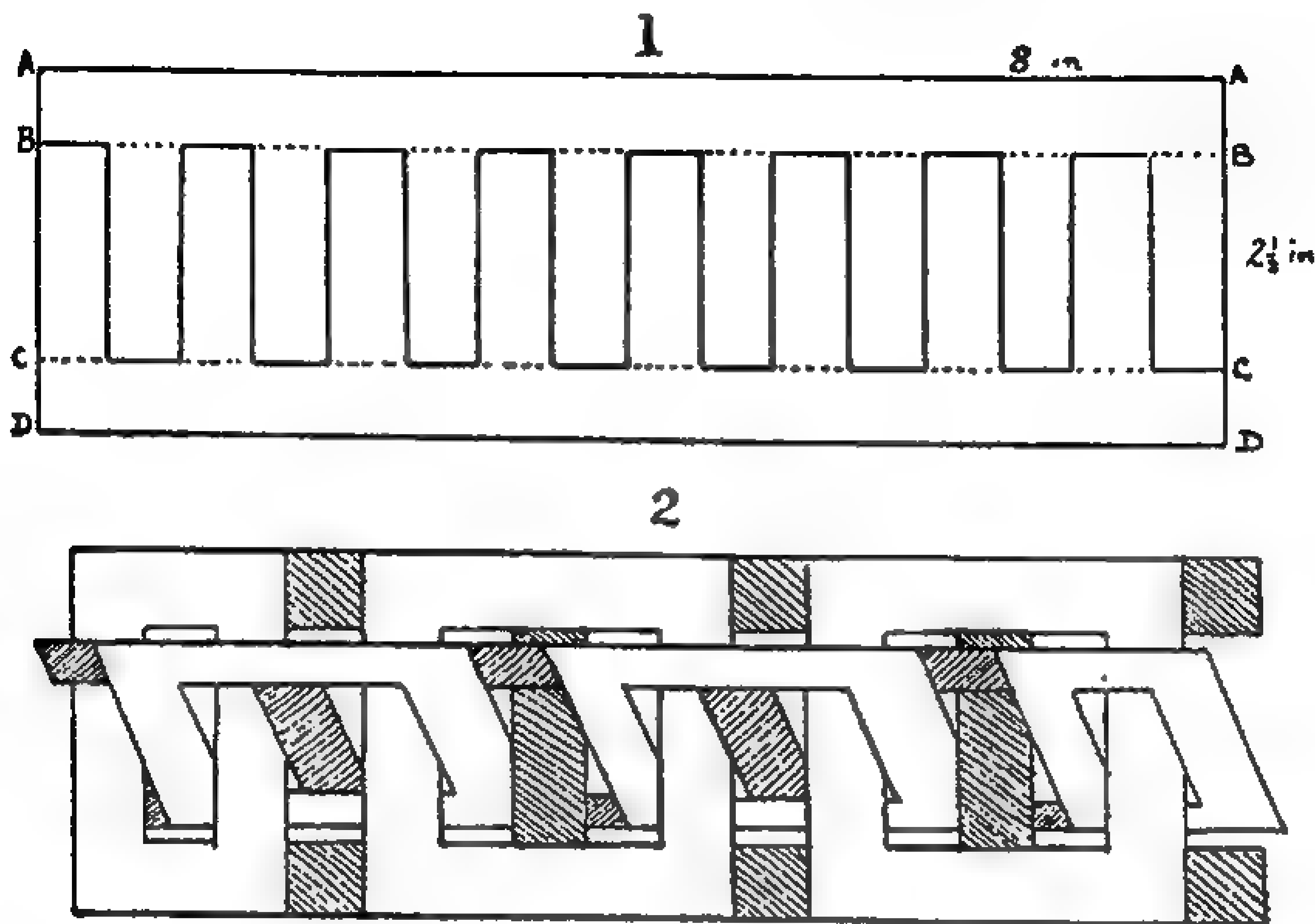
161. 贝齐·罗斯的趣题

将这张圆纸片沿下页图 1 中所示的虚线对半折起，将其上半部分如所示那样等分为五个部分。现在沿这些分隔线将纸折起，它的样子将如图 2 所示。如果你想要一个像图 3 那样的五角星，就从 A 剪到 B；如果你希望像图 4 那样，就从 A 剪到 C。于是，你这一剪子的终点靠底下的顶点越近，所剪五角星的角就越细长；你剪的终点离底下的顶点越远，这五角星的角就越粗短。



162. 纸板链条

读者很可能会感到，他为切割这纸板链条而付出的用心和耐心是有回报的。我们假定他有一张 8 英寸长 $2\frac{1}{2}$ 英寸宽的纸板，尽管纸板的尺寸是无关紧要的。但如果你想得到一根长链条，你当然得取长条形的纸板。首先用直尺和铅笔在离纸板边缘半英寸的地方作出直线 BB 和 CC，然后作出一系列相隔半英寸的竖直短线（见下页图）。在纸板的另一面以完全同样的方式作出这些直线，而且，为了使纸板两面的直线能够重合，最好用针在这些短线的端点处刺穿纸板。现在，拿起你的小折刀，将纸板从 AA 向下劈到 BB，从 DD 向上劈到 CC。然后沿着所有的竖直短线将纸板割穿，再沿着 BB 和 CC 上的非虚线部分将纸板割到其厚度的一半。接下来将纸板翻个面，沿着 BB 和 CC 上的虚线部

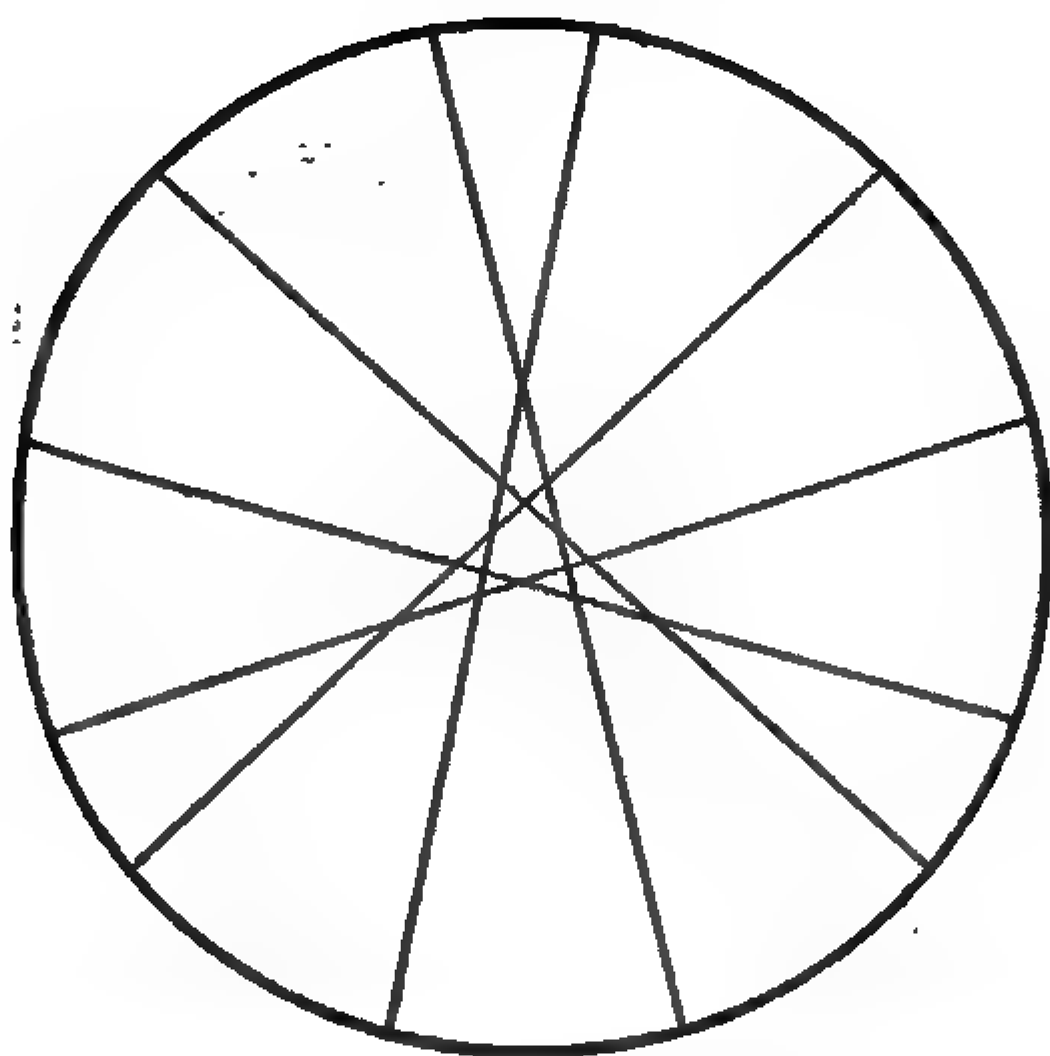


分将纸板割到其厚度的一半。用小折刀稍加小心地进行分离，这纸板就被分成两个相互扣住的像梯子那样的部分，如图 2 所示。如果你把所有的阴影部分都割去，你就得到那根链条了，它是从这纸板上完整地割下来的，没有任何粘连，正如第 120 页的那幅图所示。

这道趣题有一个有趣的变种：割出一个套着两把钥匙的钥匙圈——以同样的方式，没有粘连。

164. 薯片趣题

切割六次得到的块数可以多至二十二块。下页插图显示了一个非常对称的解法。对于这种问题，有一个基本的法则：每次切割都要与其他的每次切割相交，交点则不能重复；也就是说，每条切割线都要经过其他每条切割线，但是不能有两条以上的切割线在什么地方交于同一点。进行切割的其他方式有的是，但

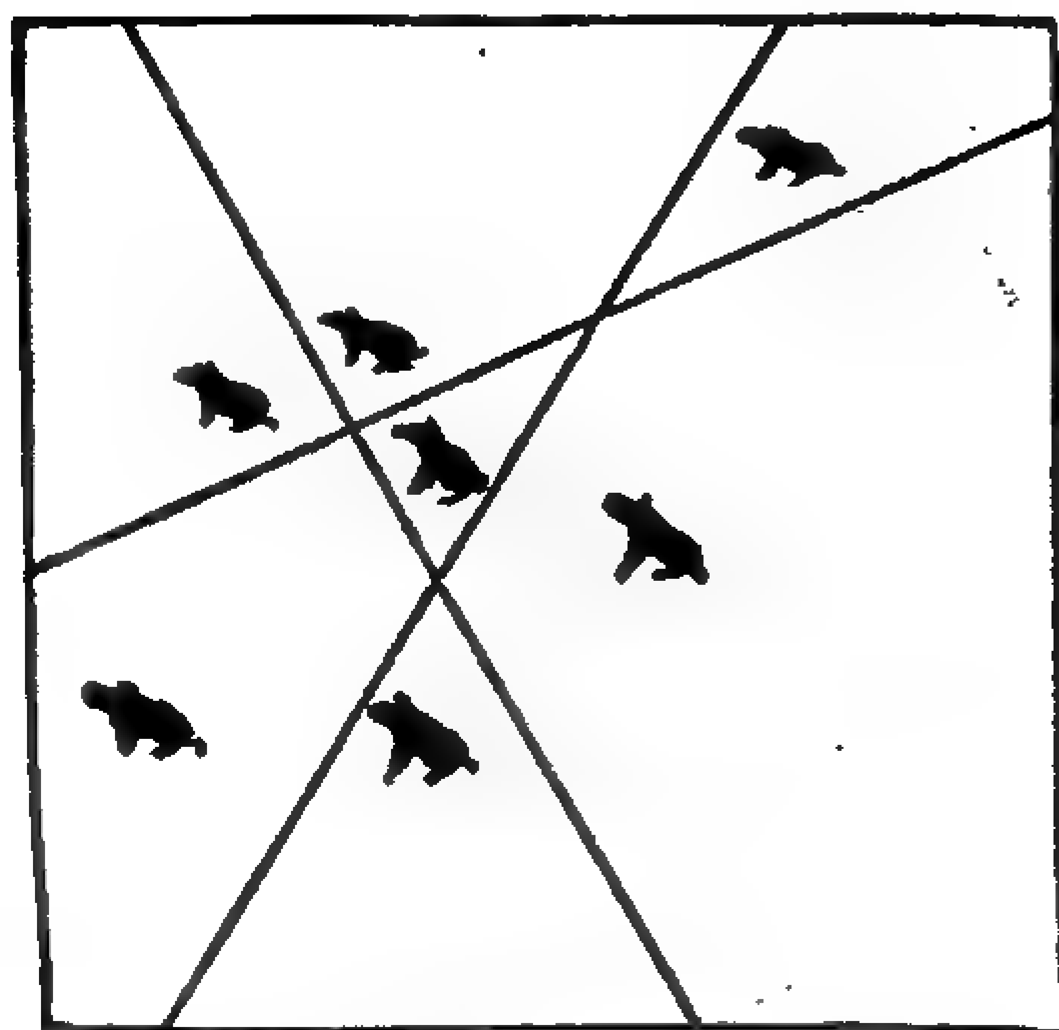


如果我们要得到最大的切割块数，这条法则是必须始终遵守的。

一般的公式是：切割 n 下，我们总可以切出 $\frac{n(n+1)}{2}+1$ 块。在已故的萨姆·劳埃德所提的问题中，有一道是切割一块立体的干酪，问直切 n 次能得到的最大块数是多少。当然，与前面一样，切成的干酪块既不能移动也不能堆叠。这里我们得对付平面（而不是直线）相交的问题，而一般的公式是：切割 n 下，我们可以切出 $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}+n+1$ 块。除了 n 的少数几个较小的值，要"看"出一次次切割的方位和效果是极其困难的。

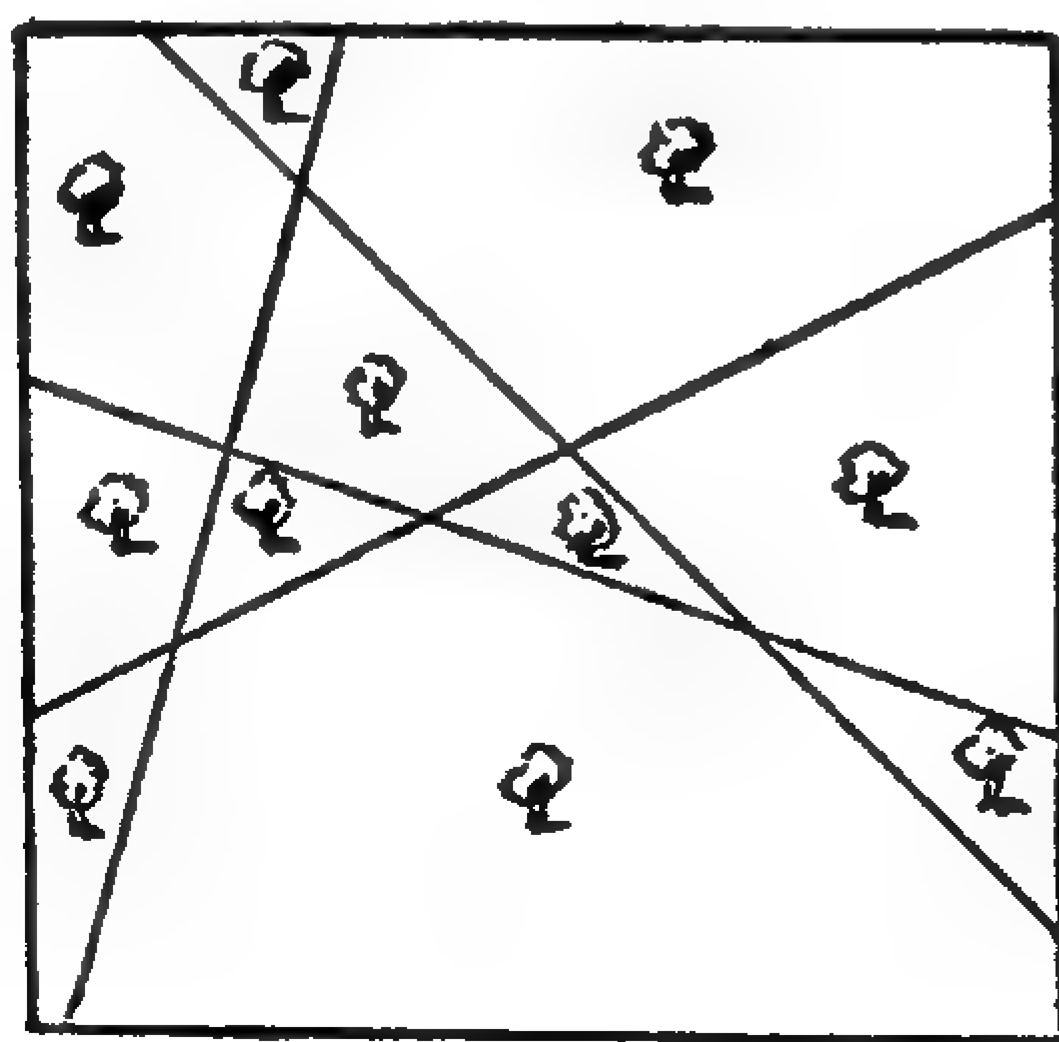
165. 七头猪

下页插图显示了怎样设置那三道栅栏，以把各头猪分别围在一个小猪圈里。如上题所示，在一个正方形里，用三条直线所能围出的空间的最大个数是七。你必须记住这一事实，用尝试的方法解决本题。



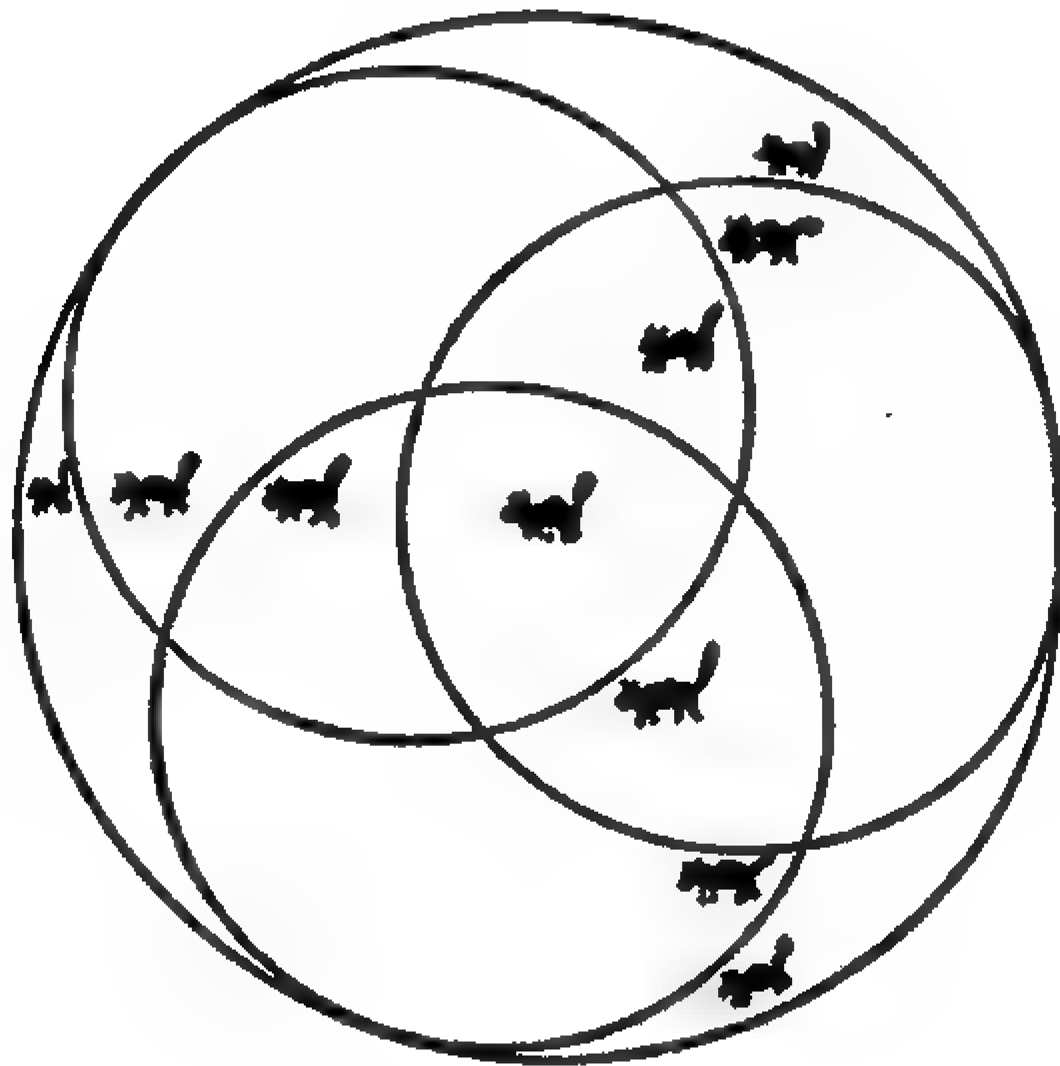
166. 地主的篱笆

只要四道篱笆,如下图:



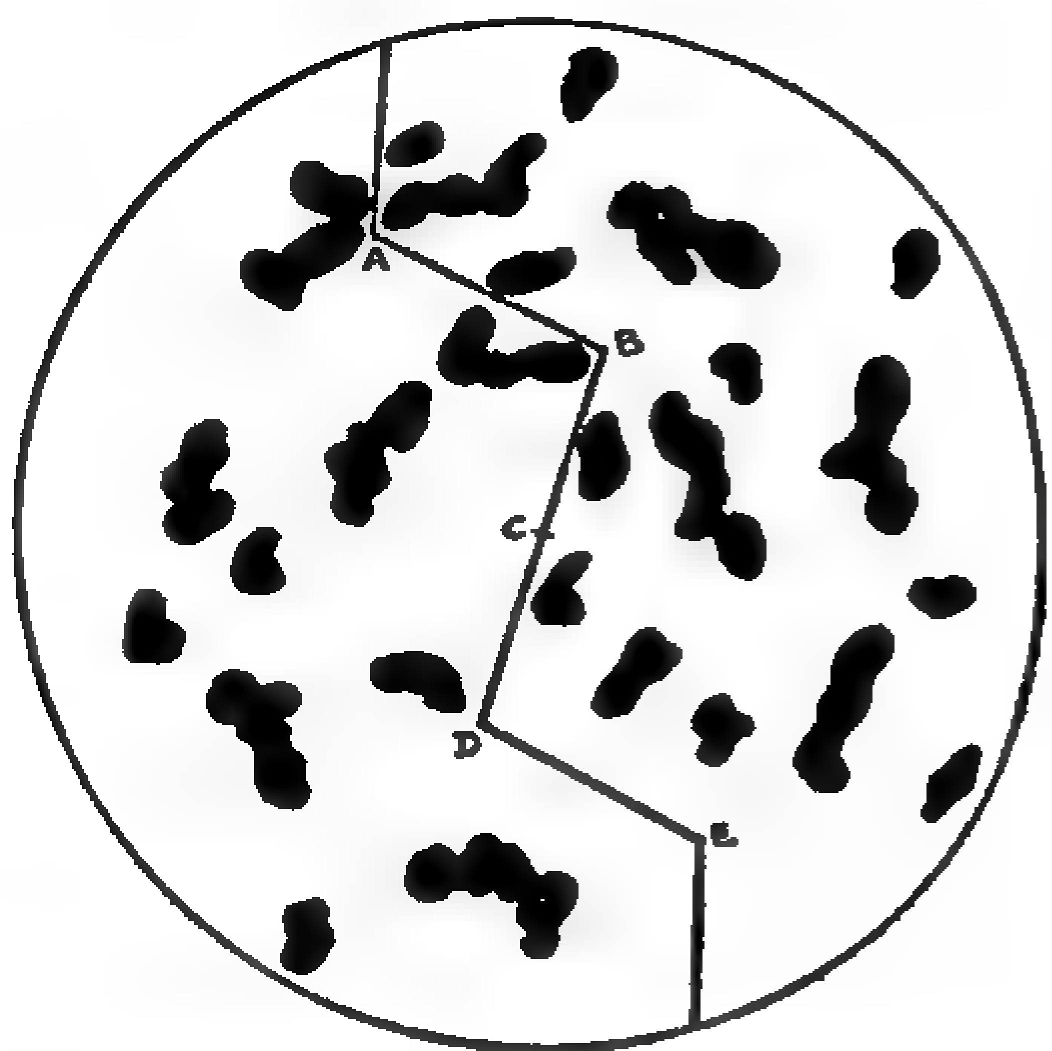
167. 魔法师的猫

这幅插图用不着什么解释。它清楚地显示了怎样画上三个圆圈，使得每只猫都有各自的一块圈地，而且不跨过边界就不能与其他猫接触。



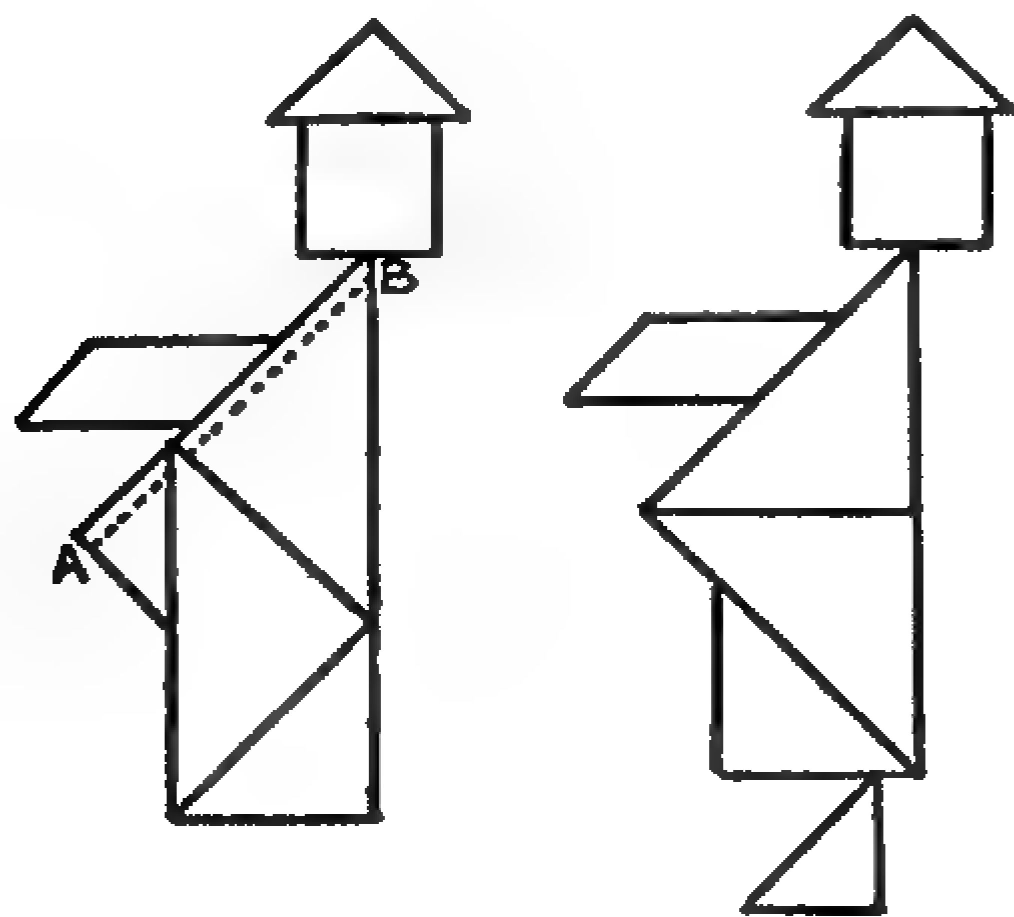
168. 圣诞布丁

下页插图显示了怎样才能把这布丁切割成大小和形状完全相同的两个部分。切割线必须经过点 A、B、C、D 和 E。但是，在满足这个条件的前提下，切割线可以有无穷多种变化。例如，由 A 向边缘切割到一半处时，可以有无穷多种方式完成这条切割线（可以是直线也可以是曲线），只要由 E 到边缘的那条切割线与之完全对称。在其他地方也可采用类似的变化。



169. 一个七巧板悖论

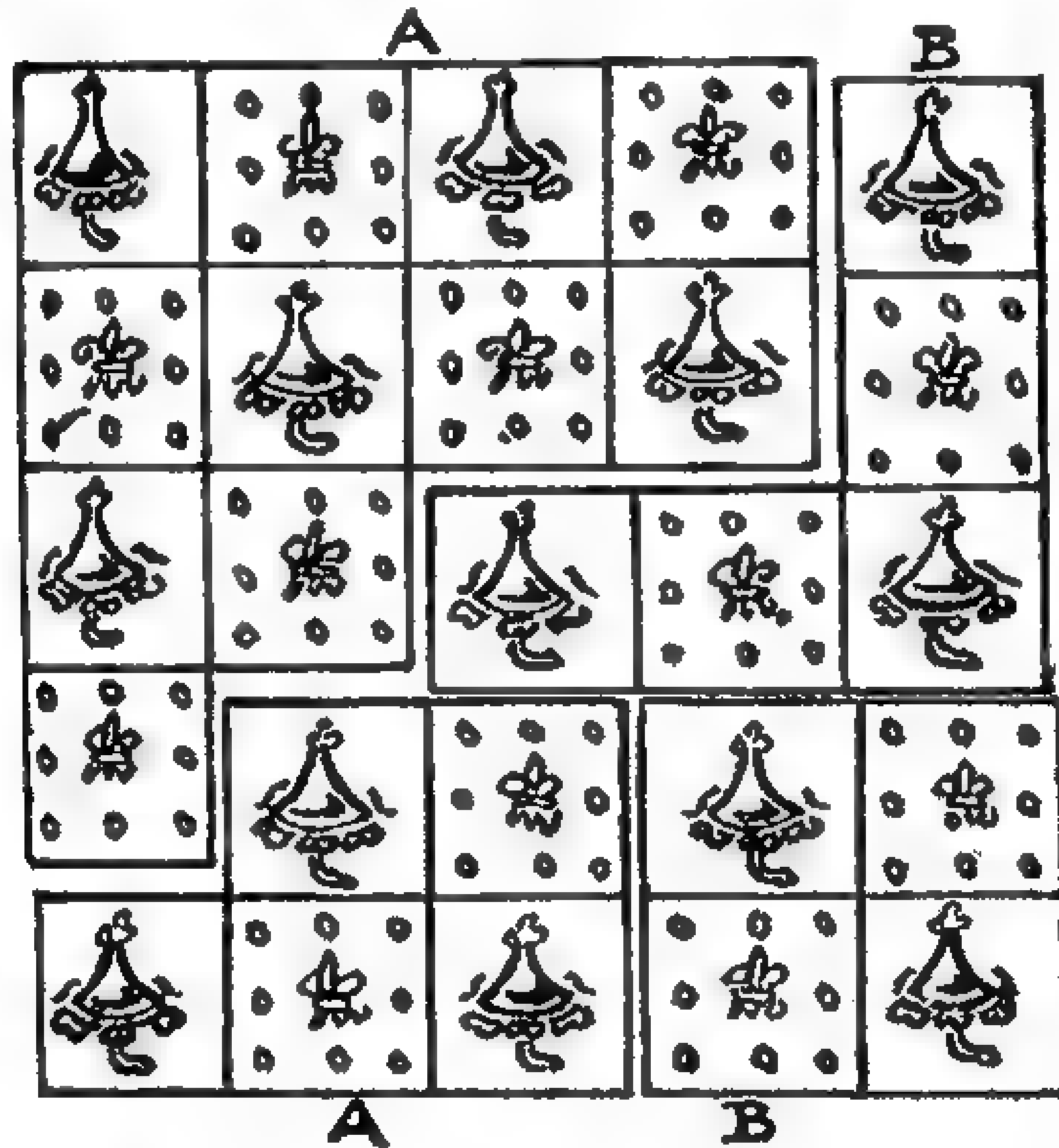
下面这幅图显示了这两个人形是怎样构造出来的——每个人形都是用一套七巧板。你会注意到,他们的头、帽子和手臂是完全一样的,而且身体底部的宽度也相同。但第一个人的身体用四块七巧板拼成,而第二个人只用了三块。第一个人的身体比



第二个人正好大了由虚线 AB 所标明的那个狭长条。因此这个狭长条与作为第二个人的脚的那块七巧板面积完全相等，不过像这样沿着身体的一条边增加一点面积用眼睛是不容易看出来的。

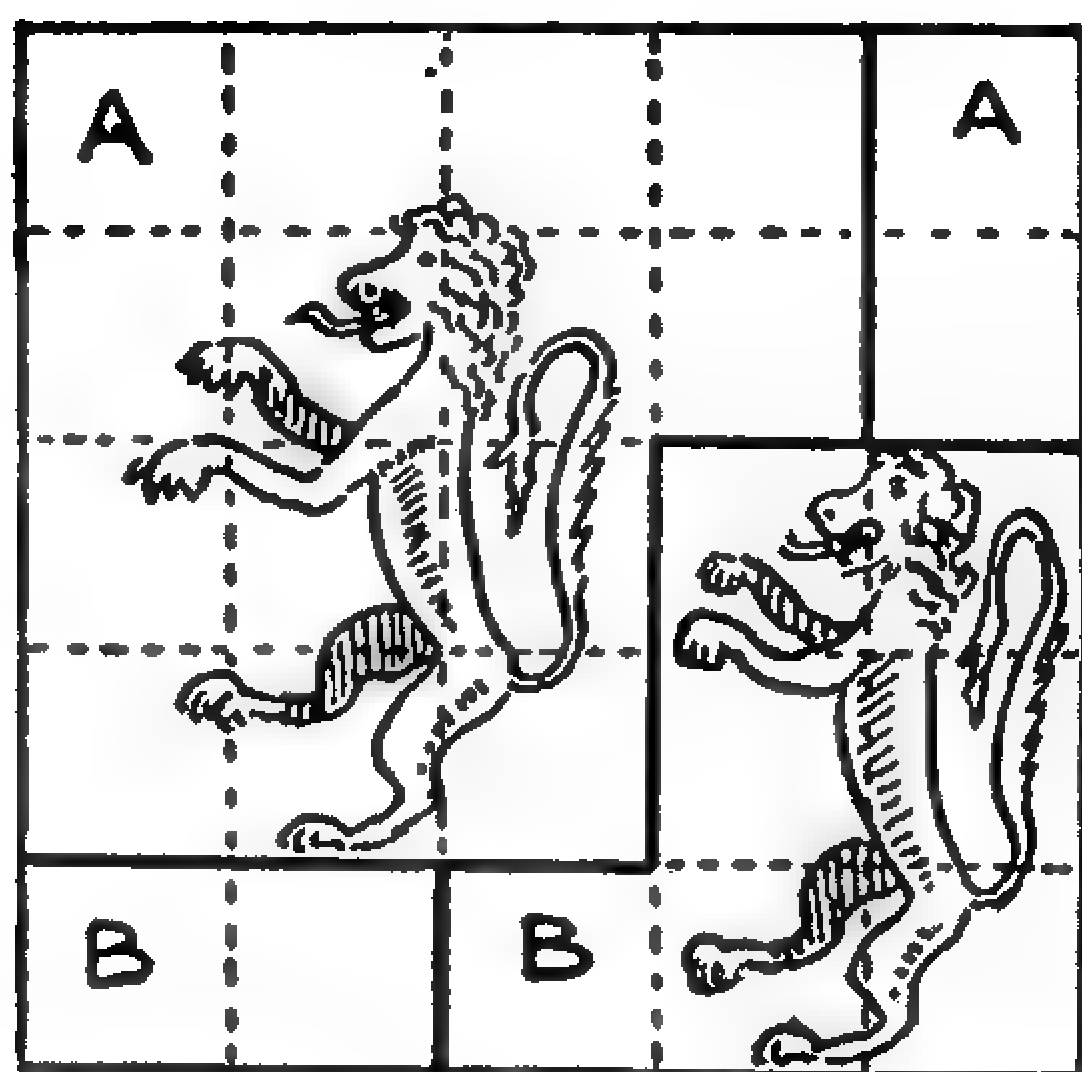
170. 垫子套面

标着 A 的两块织锦可拼起来形成一块标准的正方形垫子套面，而标着 B 的两块则可形成另一块垫子套面。

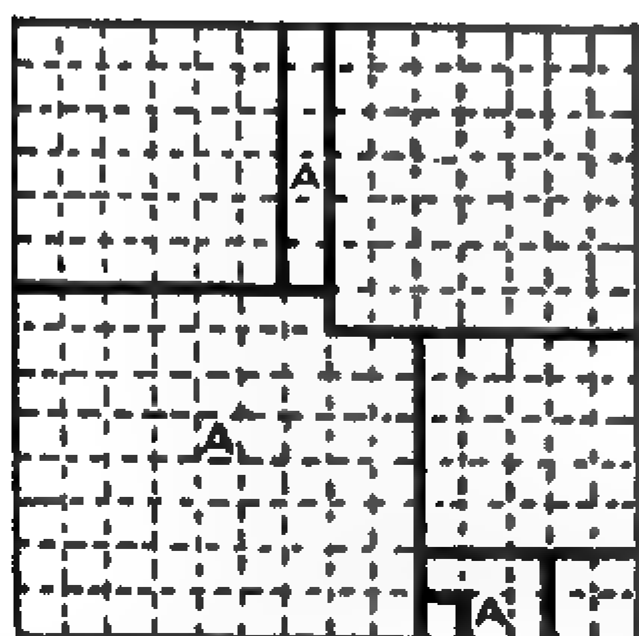


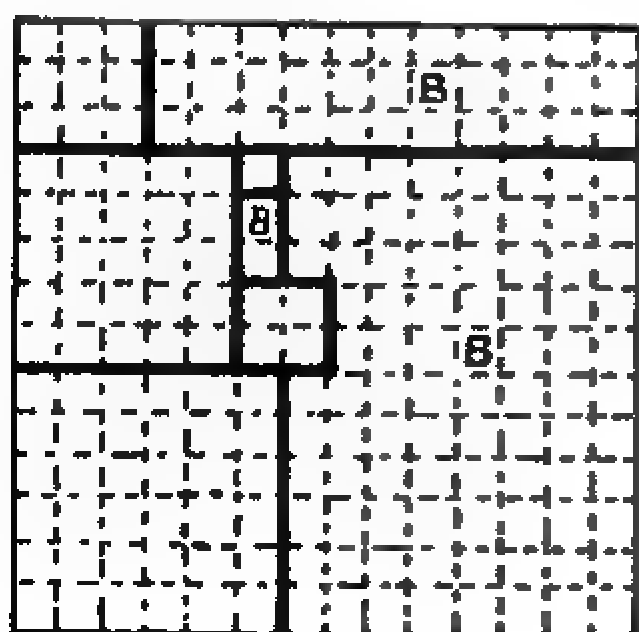
171. 旗帜趣题

下页这幅插图不言自明。把这块旗布分成 25 个小正方形（因为25 这个数是两个平方数——16 和9 之和），然后沿着粗线裁剪。标着 A 的两块拼成一个正方形，而标着 B 的两块拼成另一个正方形。



172. 斯迈利太太收到的圣诞礼物

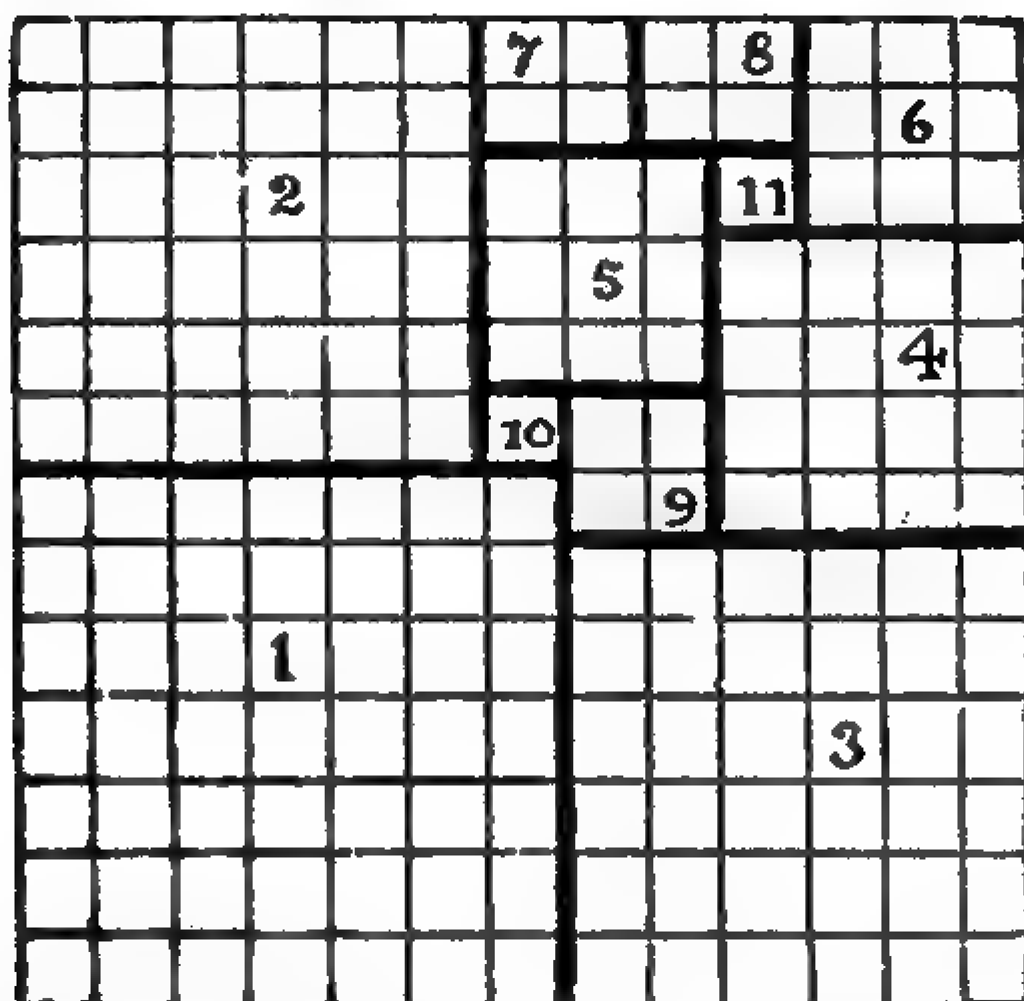




第一步是找出六个各不相同的加起来等于 196 的平方数。例如，1 + 4 + 25 + 36 + 49 + 81 = 196，1 + 4 + 9 + 25 + 36 + 121 = 196，1 + 9 + 16 + 25 + 64 + 81 = 196。余下的事就需要个人的判断力和机智性了，而且对于求解过程也不可能给出一个确定的规则。所附的草图显示了相应于上述前两种情况的解。显然，标着 A 的三块，以及标着 B 的三块，在它们各自的情况中都将拼成一个正方形。把各部分拼合起来的方式可以有稍许变化，但读者可能有兴趣就我所给的第三组平方数找出一个相应的解来。

173. 珀金斯太太的被子

下图显示了这条被子应该是怎样拼成的。

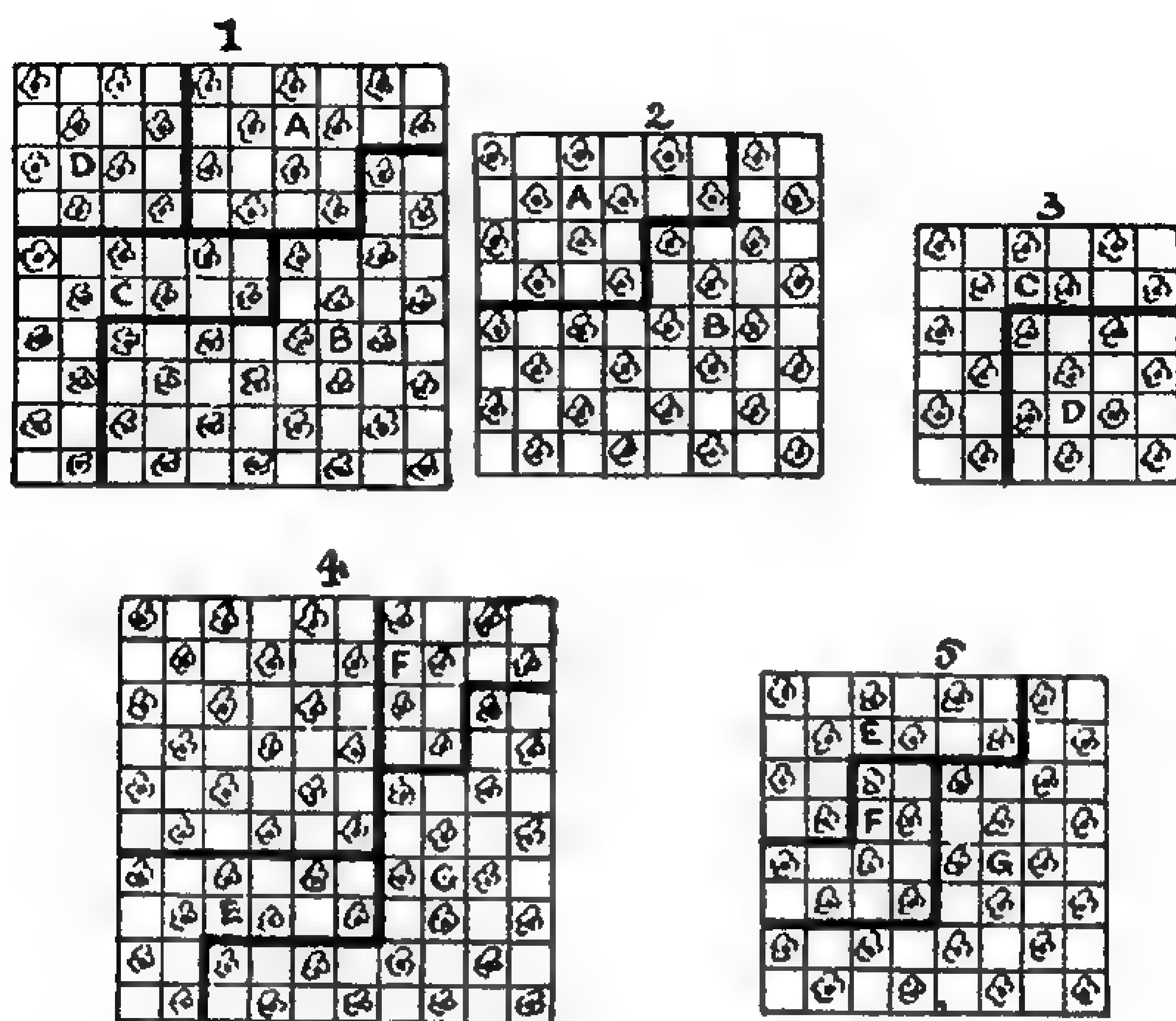


我认为，这道趣题本质上只有一个解。分成的正方形最少得有十一个。各部分的大小必定如图所示，最大的三块必定如图放置，而余下的一组八个正方形可以被“镜射”①，但不能有与此不同的布局。

174. 两块织锦

就我所能发现的而言，满足这些条件的解只有一个。裁成的小块如下页图1那样拼起来。图2和图3则显示了应该怎样裁剪原来那两块正方形织锦。你会看到，小块A和C各有二十个小方格，因此它们面积相等。图4也算是解决了这道趣题（把较大的那个正方形如图5那样裁剪），但这个解不满足下面这句话所含

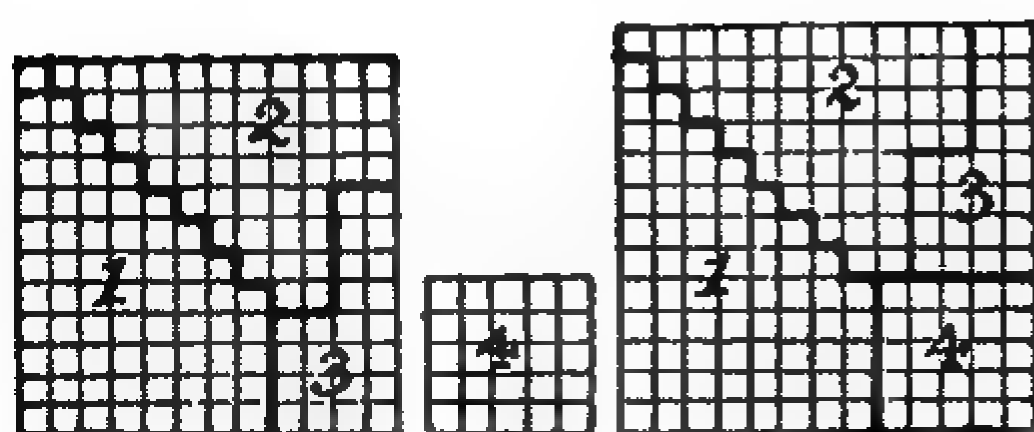
① 即以大正方形的一条对角线为对称轴做对称变换。—— 译者注



的一个小条件："我以她所期望的方式把这两个正方形裁成四块。"在这个情况中，那个较小的正方形原封不动。我仍然把它给出来，是为了说明这种趣题的一个特征。在一道这种类型的题目中，如果要让图案匹配得当，对任何一个小块都不能作 **90°** 转动。但是我们可以对一个形状对称的小块作 **180°** 转动（如图 4 中 F 的情况）—— 也就是说，使它上下颠倒。在这些方格图案题目中，对一个小块是不是可以作 90° 转动，或者作 180° 转动，或者根本不转动，取决于这图案的性质，取决于所用的料子，还取决于这小块本身的形状。

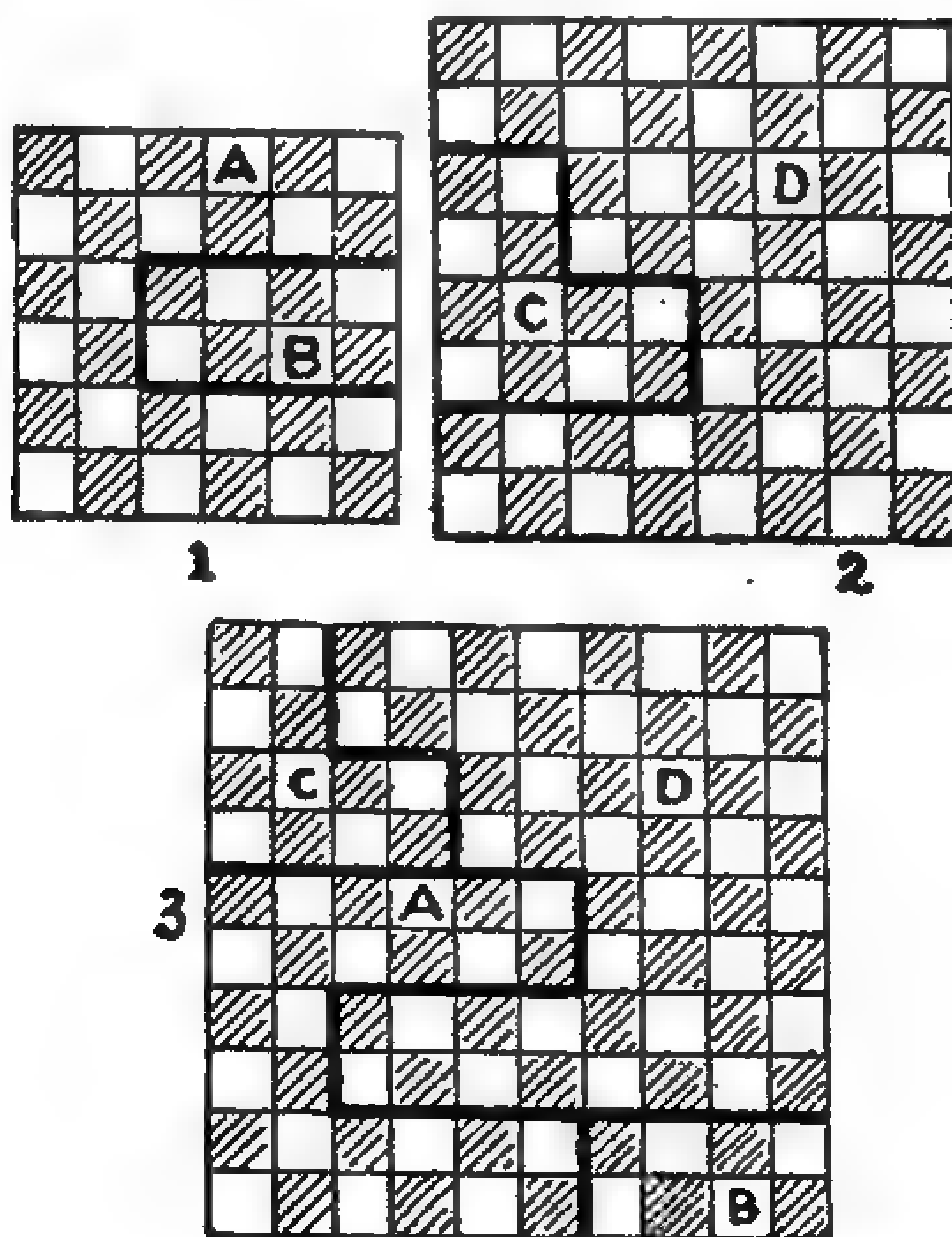
175. 又一道拼缝趣题

如下页上图所示，这位女士只要在那块较大的拼缝丝绸上沿粗黑线拆开针脚，就可将这四块料子拼缝成一个正方形。



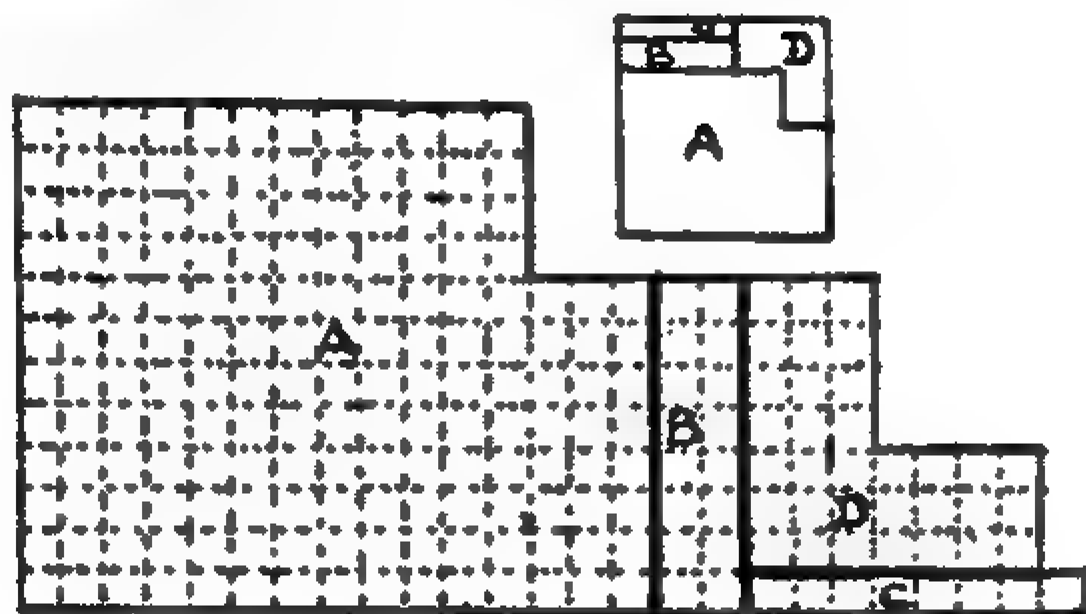
176. 剪油毡

只有一个解能使我们在这两块油毡中较大的那块上剪下尽量小的部分。下面的图 1 显示了怎样裁剪那块较小的油毡，图 2 显示了我们应该怎样剖分那块较大的油毡，而在图 3 中我们用剪成的四块拼成了一个 10 × 10 的新正方形，而且所有的方格都匹配得当。可以看到，标着 D 的那块包含五十二个方格，这是在这些条件下所能保有的最大裁剪块了。



177. 又一道油毡趣题

沿着大图中的粗线剪，然后按小图所示的方式把剪成的四块拼成一个标准的正方形。



178. 纸板盒

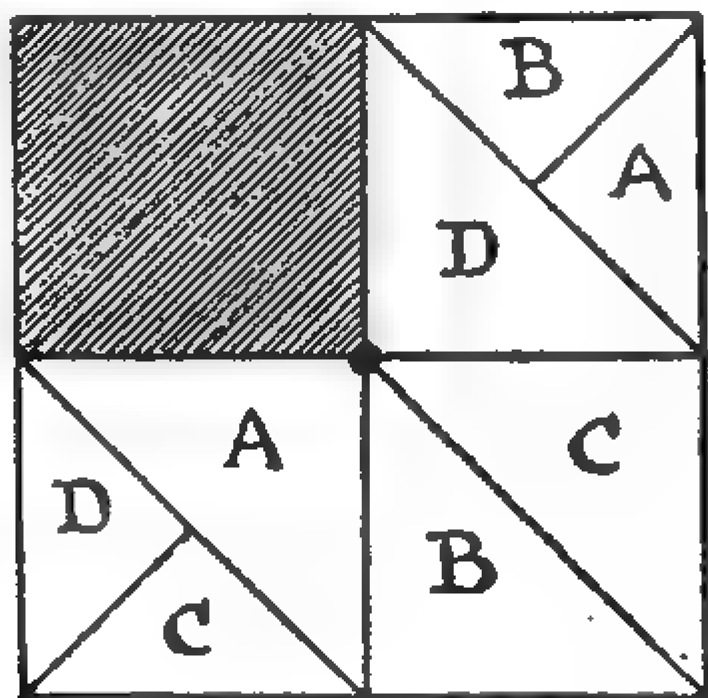
把顶面面积与侧面面积乘起来，再除以端面面积，就给出了长的平方。同样，顶面面积与端面面积的积除以侧面面积给出了宽的平方；而侧面面积与端面面积的积除以顶面面积给出了高的平方。但我们只需要这些运算关系中的一个，让我们取第一个。于是 120 × 96 除以 80 等于 144，即 12 的平方。因此长是 12 英寸。当然，由此马上可得宽和高 —— 分别是 10 英寸和 8 英寸。

179. 钟楼窃贼

如果我们有了一个直角三角形的一条边长(a)，并且知道了斜边与另一条边的长度之差(这个差我们记为 b)，那么斜边的长度就是$\frac{a^2}{2b}+\frac{b}{2}$。在我们这道趣题的情况中，就是$\frac{48\times48}{6}+1\frac{1}{2}$英寸 = 32 英尺 $1\frac{1}{2}$ 英寸，这就是那根绳子的长度。

180. 四个儿子

这幅草图显示了对这块土地的最公平的划分方式，它“使得每个儿子分到的土地具有同样的形状和面积”，而且使得他们都不必擅自闯入他人土地就能使用中央的那口井。题目条件并没有要求每个儿子的土地要连成一片，不过分给同一个人的两部分土地必须要分开，否则相邻的两部分土地可以被认为是一块，在这种情况下，关于形状相同的条件就不能满足。现在对每块土地来说只有一种形状——将一个正方形沿对角线剖分而得到的等腰直角三角形。而阿尔弗雷德、本杰明、查尔斯和戴维每人都可以从外部进入自己的土地，而且都能直接使用中央的那口井。



181. 三个火车站

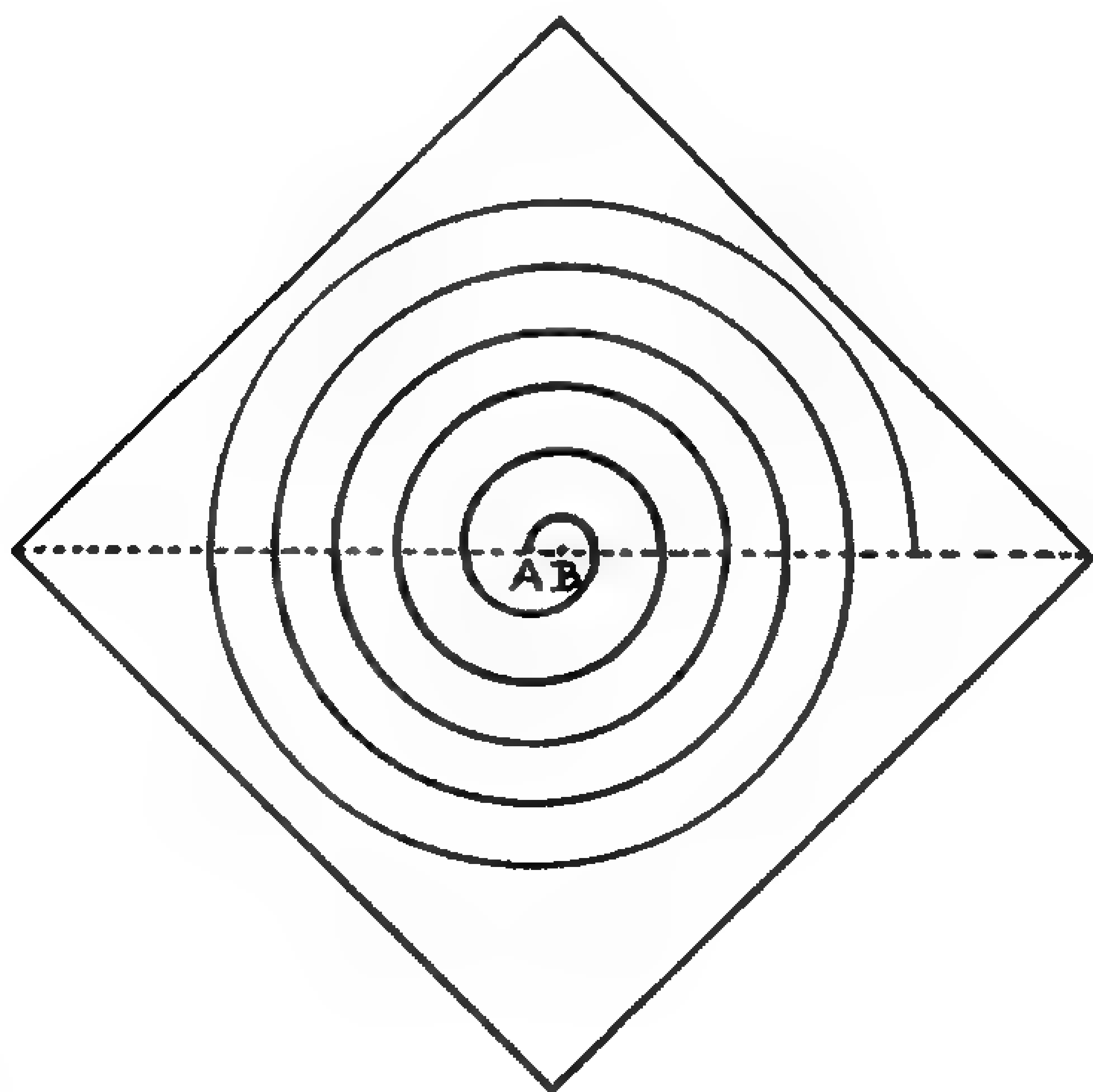
这三个火车站形成了一个三角形，其边长分别为 13、14 和 15 英里。以长 14 的边为底边，那么这三角形的高为 12，面积为 84。将这三条边长乘起来，再除以面积的四倍，结果是八又八分之一英里，这就是所求的距离。

182. 花园趣题

这四条边长之和的一半是144。把它依次减去那四条边长，我们得到64、99、44和81。把这些数乘起来，结果得到4752的平方。因此这花园的面积为4752平方码。当然，那棵树与四个顶点等距，说明这花园是一个能内接于一圆的四边形。

183. 画螺线

按下图中虚线所示，在纸上折出一道折痕。然后在折痕上任取两个点，比方说图中的A和B，交替地以这两个点为圆心，分别在这条虚线的上下方作半圆，并注意使圆弧的端点相连，于是



这件事就做成了。当然，这并不是一条真正的螺线[①]，但是本题就是要你画出由题目插图所指定的那条螺线，而我用这个简单的方法把它画出来了。

184. 画椭圆

如果你把这张纸裹在一个圆柱体瓶子或罐子的侧面上，那么用圆规画一下就能画出一个椭圆。

185. 圣乔治之旗

这面旗帜长 4 英尺宽 3 英尺，于是其对角线长 5 英尺。你只要把旗帜周长（14 英尺）的四分之一（$3\frac{1}{2}$ 英尺）减去对角线长度的一半（$2\frac{1}{2}$ 英尺），所得的差（1 英尺）就是所要求的红色十字架的臂宽。这时十字架的面积与白色底子的面积相同。

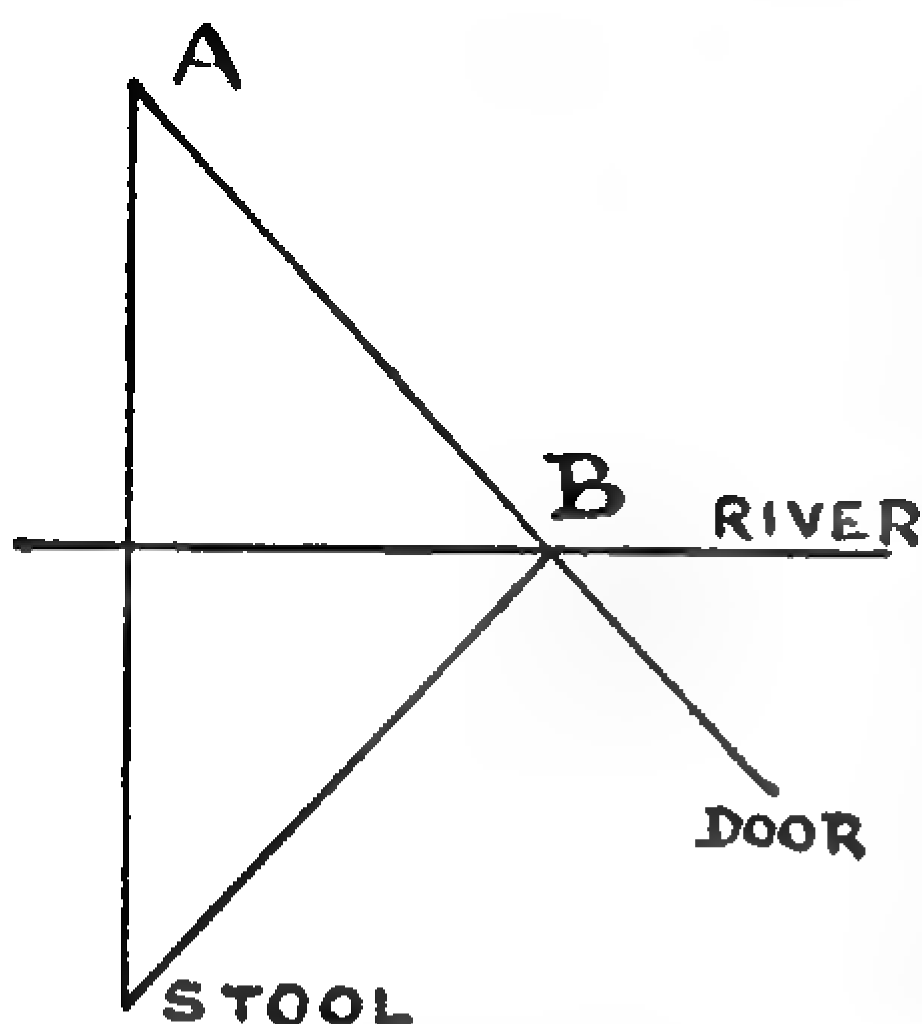
186. 布带趣题

把这两根立竿的高度乘起来，又把它们加起来，将其中的一个结果除以另一个结果。也就是说，如果那两个高度分别是 a 和 b，那么$\frac{ab}{a+b}$就是交点的高度。于是在我们这道趣题所指定的情况中，交点离地面高2英尺11英寸。两根立竿之间的距离与答案无关。本以为这是一个偶然性省略的读者，或许有兴趣于找出为什么可以不考虑两根立竿间距离的道理。

---

① 这里大概指能用极坐标方程精确表示出来的螺线，如阿基米德螺线 $r = a\theta$、对数螺线 $r = e^{a\theta}$ 等。但广义地说，当极径 r 随极角 θ 的增加而增加时，点 $P(r,\theta)$ 的轨迹就称为螺线。适当地选取极点，本题的这条螺线即可符合这个定义。—— 译者注

187. 挤奶女工的趣题



RIVER:河　DOOR:乳品间门口
STOOL:挤奶凳

如左图所示，从挤奶凳出发作一条垂直于这侧河岸的直线，并将它延长到点 A，使得 A 到这侧河岸的距离与挤奶凳到这侧河岸的距离相等。如果你现在从 A 作一条直线到那乳品间的门口，那么它将与河岸交于 B。于是最短的路径就是从挤奶凳到 B 再到那门口。显然，从 A 到那门口的最短距离就是这条直线，而从挤奶凳到河岸上任一点的距离与从 A 到这一点的距离相等，因此这个解答的正确性将很可能为每一位对几何学一点都不熟悉的读者所愉快地接受。

188. 石球问题

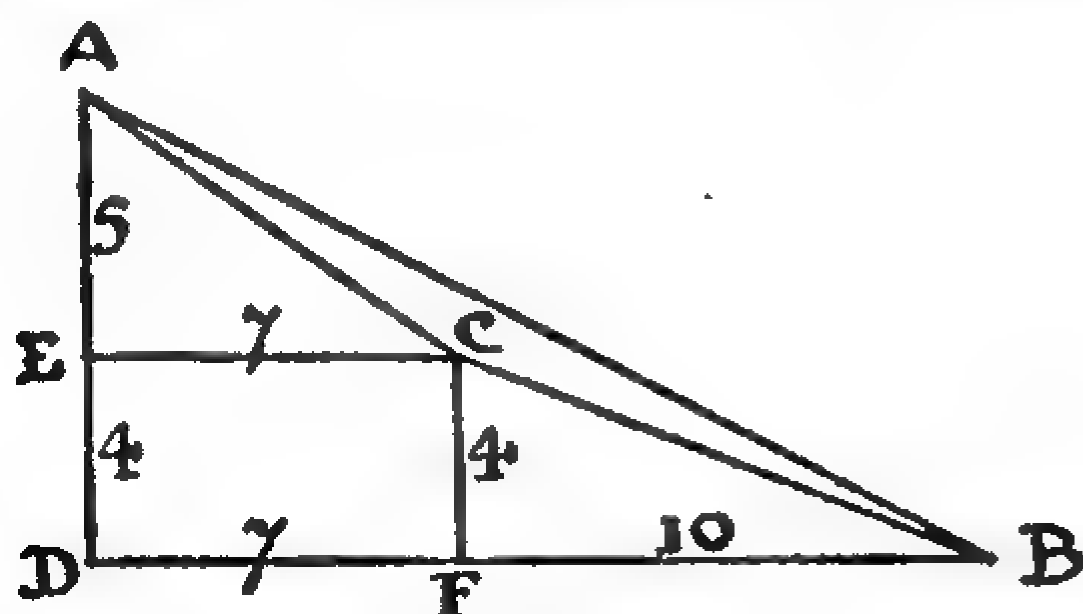
如果一个圆球放在平地上，它周围就可放六个同样的球(都放在这平地上)，而且这些球都与中央那个球接触。

再看第二个问题。圆的周长与直径之比我们称为 π，虽然我们不能用准确的数来表示这个比，但我们能够充分地靠近它，从而满足各种实际需要。然而，目前这种情况中，完全没有必要知道 π 的值。这是因为，要算出球的表面积，我们把直径的平方乘上 π；要算出球的体积，我们把直径的立方乘上 π 的六分之一。于是我们可以不理会 π，而只要去找这样一个数 —— 它的平方

等于它的立方的六分之一。显然，这个数是6。因此这个球的直径是6英尺，这样它的表面积就是36π平方英尺，而它的体积就是36π立方英尺。

189. 约克郡的地产

这块不准备出让的三角形地产的面积是十一英亩。当然，如果我们采用复杂繁琐的三角学那怪异诡诈的思路，是不难求得这个答案的。或者我会说用一个著名的公式[1]就能把这问题归结为求$(4\times370\times116)-(370+116-74)^2$的平方根的四分之一，即1936的平方根的四分之一，即44的四分之一，即11英亩。但读者真正需要知道的只是毕达哥拉斯定理，许多趣题都建筑在它上面。它是说，在任何一个直角三角形中，斜边的平方等于两直角边的平方和。我将排除任何“不尽根”以及类似的荒唐东西，尽管事实上我们这个三角形的各条边长显然都是不可公度的无理数，因为我们不可能准确地算出那三个面积数的平方根。



在上面这幅草图中，ABC表示我们的三角形。ADB是一个直角三角形，AD长9而BD长17，这是因为9的平方加上17的平方等于370，即AB上的正方形的已知面积。AEC也是直角三

① 即海伦公式，不过是它的一种变化形式。参见第190题答案。——译者注

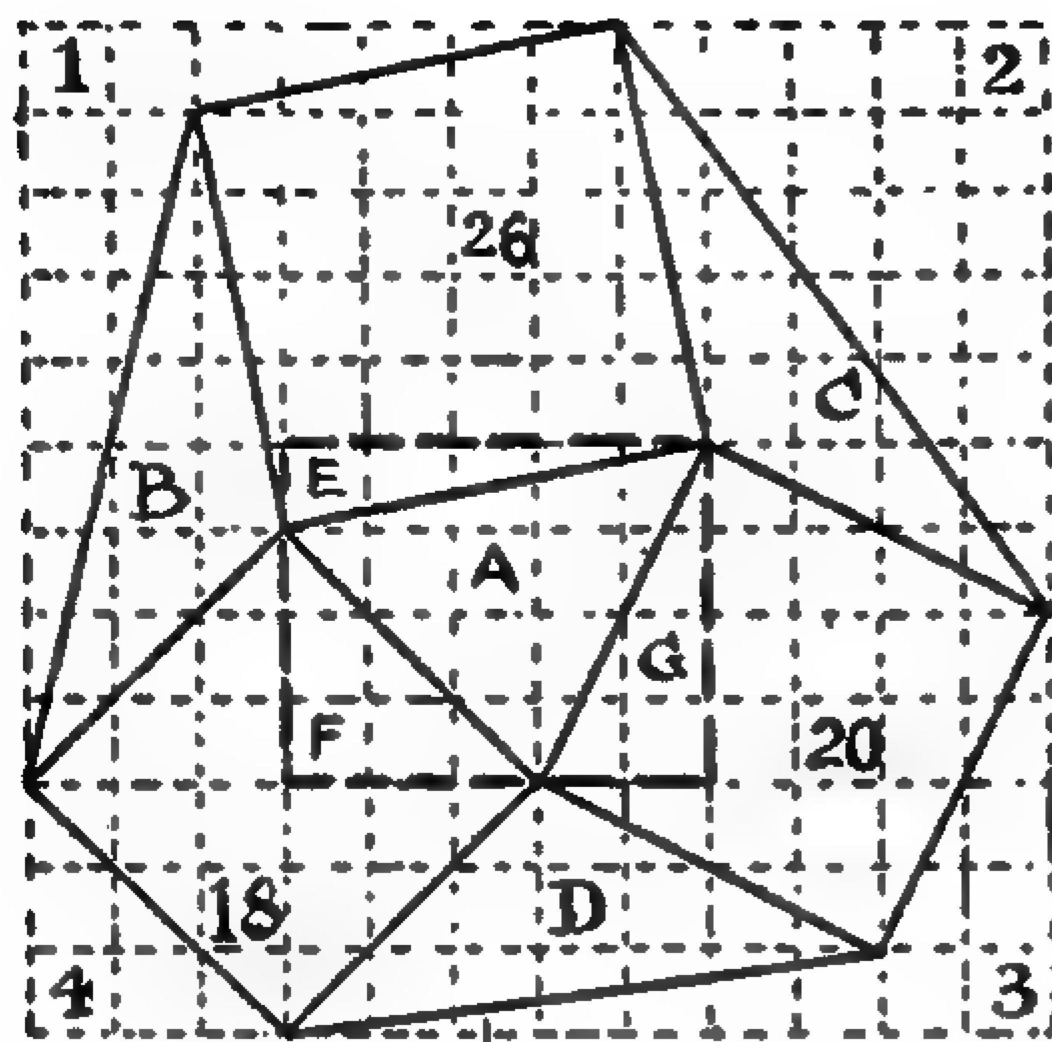
角形,而5的平方加上7的平方等于74,即AC上的正方形地产的面积。同样,CFB是直角三角形,因为4的平方加上10的平方等于116,即BC边上的正方形地产的面积。好,虽然我们那块三角形地产的边长都是不可公度的无理数,但是在这幅草图中我们有了精确地求出其面积所需要的全部准确图形。

三角形ADB的面积显然是9×17的一半,即$76\frac{1}{2}$英亩。AEC的面积是5×7的一半,即$17\frac{1}{2}$英亩;CFB的面积是4×10的一半,即20英亩;而长方形EDFC的面积显然是4×7,即28英亩。现在,如果我们把$17\frac{1}{2}$、20和28加起来而得到$65\frac{1}{2}$,再把这个和从大三角形ADB的面积(我们已经求出它为$76\frac{1}{2}$英亩)中减去,很清楚,留下的必定是ABC的面积。这就是说,我们所求的面积是$76\frac{1}{2}-65\frac{1}{2}=11$英亩。

190. 农场主沃泽尔的地产

这一整块地产的面积正好是一百英亩。为求出这个答案,我用了下面这个不起眼的公式:$\frac{\sqrt{4ab-(a+b-c)^2}}{4}$,其中$a$、$b$、$c$表示那三个正方形的面积,次序不论。用这个表达式可算出三角形A的面积。你会发现那是9英亩。容易证明,A、B、C、D的面积全都相等,因此答案是$26+20+18+9+9+9+9=100$英亩。

下面是证明。设下页这幅草图中的每一个虚线方格代表一英亩,那么这幅草图必定是正确反映了这块地产的平面图。这是因为:5和1的平方和等于26;4和2的平方和等于20;而3和3



的平方和等于 18。现在我们立刻就可看出，三角形 E 的面积是 $2\frac{1}{2}$，F 的面积是 $4\frac{1}{2}$，而 G 的面积是 4。把它们加起来，得 11 英亩。我们把这 11 英亩从那个矩形的面积 20 英亩中减去，于是求得土地 A 的面积正好是 9 英亩。如果你想证明 B、C、D 在大小上与 A 相等，就把它们各个沿着从最大边中点到其对角顶点的直线一分为二，你会发现，如果沿这条线剪开，那么在每种情况中剪成的两块都正好可以拼起来形成 A。

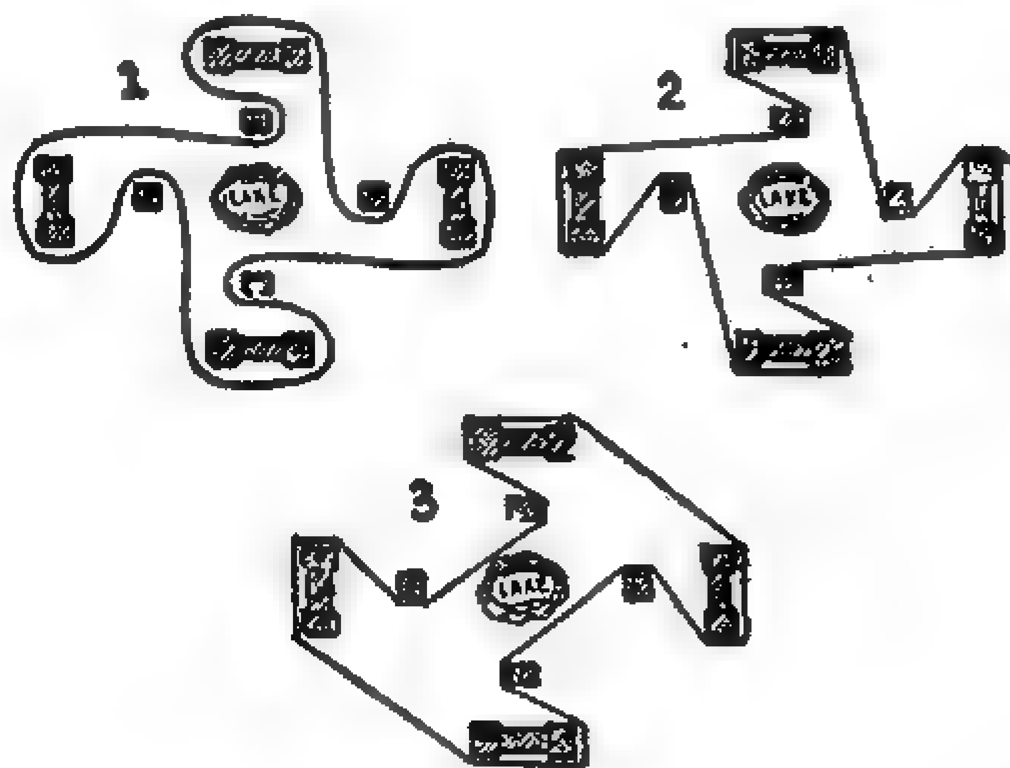
还可以用一种更为容易的方法来得到我们的证明。这个方格草图的总面积是 $12 \times 12 = 144$ 英亩，而 1、2、3、4 这四个部分不属于这块地产，它们的面积分别为 $12\frac{1}{2}$、$17\frac{1}{2}$、$9\frac{1}{2}$ 和 $4\frac{1}{2}$。把它们加起来得44，把它从144 中减去，留下100，即所求的这一整块地产的面积。

191. 新月形趣题

参见原题中的草图，设 AC 为 x，从而 CD 为 $x-9$，而 EC 为 $x-5$。于是$x-5$ 是 $x-9$ 和 x 的比例中项，由此我们求得 x 等于 25。因此这两个圆的直径分别为 50 英寸和 41 英寸。

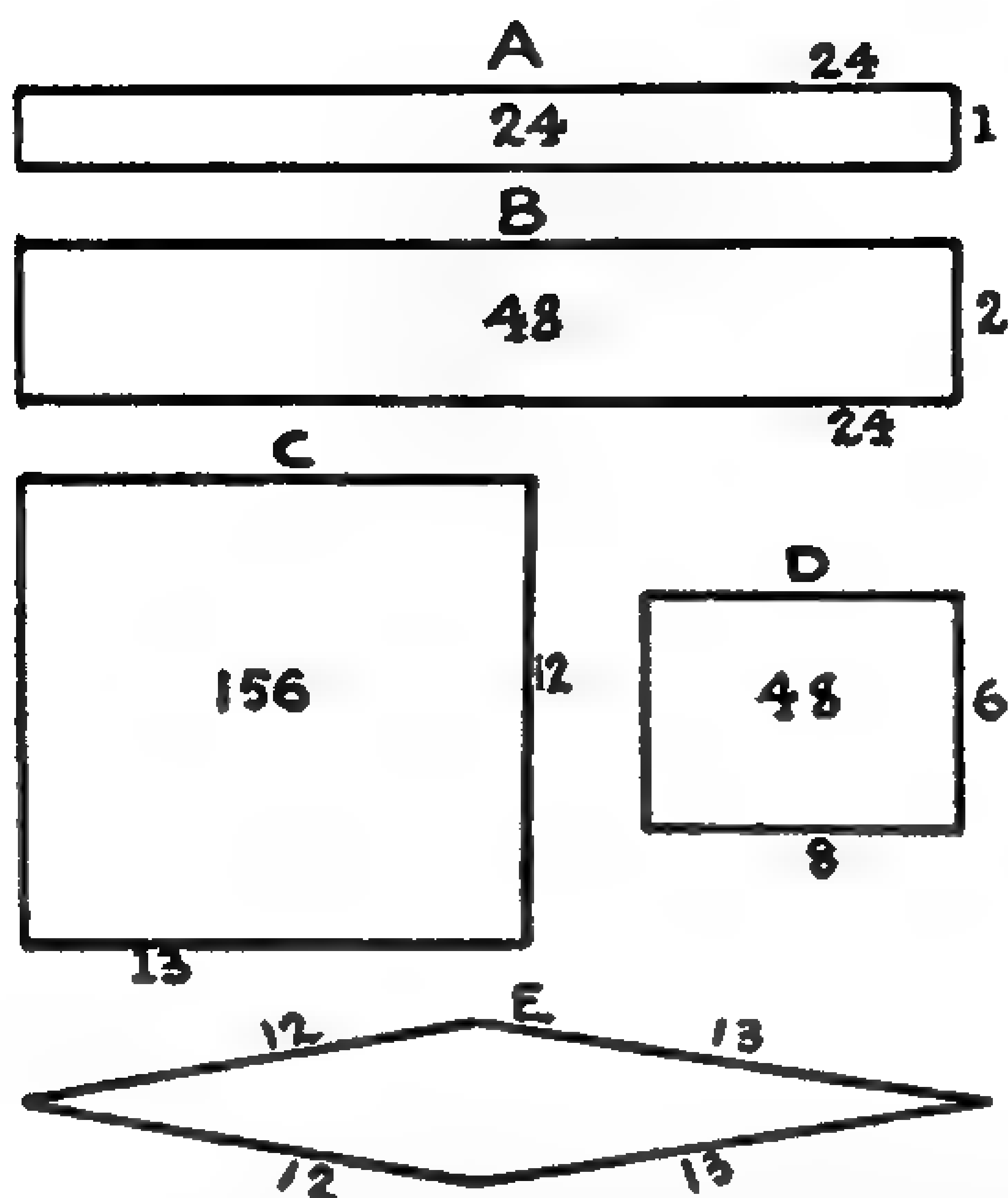
192. 颇费心机的墙

在所有的老书中，给出的答案如图 1 所示，其中那道弯弯曲曲的墙使得农舍与湖隔绝。但在寻求这道"尽可能短"的墙的走向时，今天的大多数读者都想起两点之间的最短距离是直线，他们会认可图 2 所示的方法。这当然是一个改进。然而，正确的答案实际上如图 3 所示。量一量这些线段的长度，你会看到这道墙的长度短了许多。



193. 羊　圈

这里就是人们经常给出的被认为是正确的答案：再有两个栏架就够了，因为这羊圈长二十四个栏架宽一个栏架（如下页图 A 所示），把一条边移动一下，并在每头再放入一个栏架（如



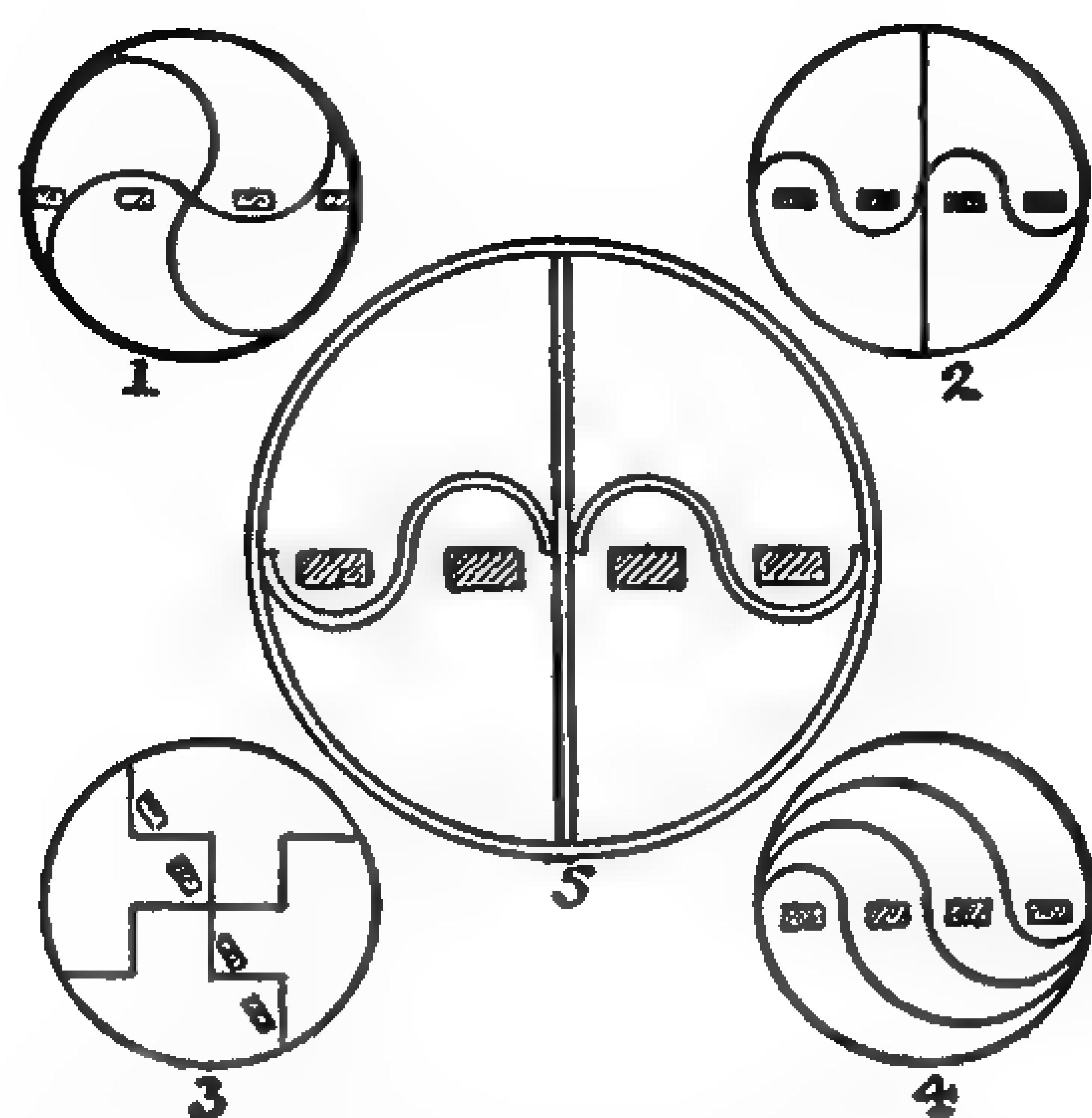
图B所示），其面积就会翻一番。这些草图没有按比例绘制。在这道趣题中，并没有什么条件规定这羊圈要具有某种特定的形状。然而，就算我们认可羊圈长为二十四宽为一，这个答案也是彻底错误的，因为显然那两个增加的栏架完全没有必要。例如，我把这五十个栏架如图C那样摆放，由于面积从二十四"平方栏架"增加到156"平方栏架"，这地方就可供650只羊食宿了。如果认为面积必须正好是原来羊圈的两倍，那么我只要用二十八个栏架来构筑它（如图D所示），手头留下二十二个栏架可在农场另作他用。即使坚持认为原来的栏架都必须用上，我也可如图E那样构筑，这样我就能准确地给出任何农场主可能会要求的面积，虽然我们不得不承认事实上羊儿们在尖角处可能无法啃草。于是我们看到，这道古老小趣题的那个被人们认可的答案，无论从哪个角度看都不能成立。然而，以前人们从未注意到这个谬误。

194. 花园的围墙

这道趣题要求用三道墙把这块圆形的土地分为四个相等的部分,而且每道墙的长度要相等。在这个问题中,有两个本质上的困难,它们是:(1) 墙的厚度;(2) 墙要有三道这个条件。关于第一点,既然告诉我们这些墙是砖墙,那么我们显然就不能忽略它们的厚度,于是我们就得求出一个这样的解答:不管这些墙的厚度是一块砖,还是两块、三块或者更多块砖,这个解答都同样有效。

第二点需要稍稍多一点的考虑。我们怎样区别"一道墙"和"几道墙"?一道笔直的、没有任何弯曲的墙,如果没有遭到什么破坏,也没有与什么东西相交,那就绝不会变成"几道墙"。同样,我们那块圆形的土地显然是被一道墙围着。然而,如果围着的是一块正方形或三角形的土地,那么它们是分别有四道墙和三道墙还是都只有一道围墙呢?诚然,我们对一个正方形的建筑物或花园总是说有"四道墙",但这只是"四条边"的一种习惯说法。如果你说的是实际上的砖墙,你会说,"我准备用一道围墙把这个正方形花园围起来"。有没有折角对我们的问题显然没有影响,因为我们可以有一道曲折的墙,也可以有一道笔直的墙。中国的长城就是一个很好的例子,这是一道具有大量折角的墙。现在,如果你看下页的图1、图2和图3,你可能感到困惑:在这些情况中,是说新建了两道墙还是说新建了四道墙呢?但是你不能称它们是题目所要求的三道墙。因为这里所发生的相交,对我们的问题要么有影响,要么没有影响。

如果你用打结的方法把两段绳子牢牢地系在一起,或者用一种航海上的方法把它们绞接起来,它们就成了"一段绳子"。如果你只是把它们相互交叉地放置,或者说重叠,它们仍然是



"两段绳子"。这完全是一个是仅仅连住还是紧密结合的问题。同样可以认为,如果把两道墙建造得形成一体——我几乎可以说,如果把它们建造得成为一回事——它们就成了一道墙。在这种情况下,如果明确指出图1、图2和图3中那四个端头只是与外围的圆墙接触,而并非真正地形成一体的话,那么它们都可以说成是具有一道或两道墙。

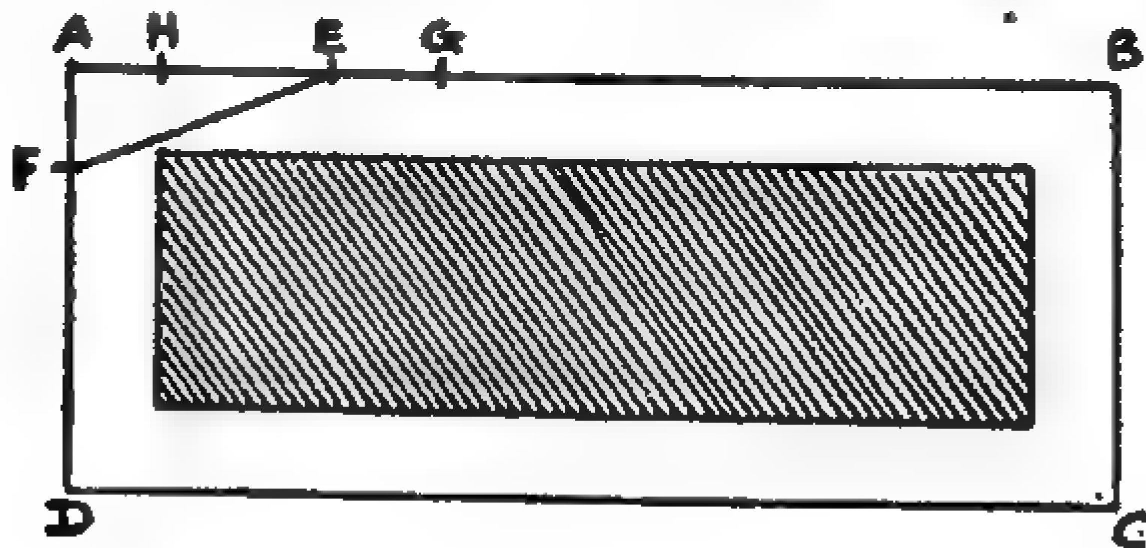
图4之所以不能成为本题的解答,在于虽然它具有所要求的三道墙(假定其端头没有与外围的圆墙形成一体),但只有当我们假设这些墙没有厚度时它才是绝对正确的。砖是有厚度的,这个事实便将这一解法从整体上予以否定,使它仅成为一种近似正确的解法。

图5显示了或许唯一正确并完全令人满意的解答。你会注意到,除了那道圆墙,还有三道新建的墙,它们相互接触(因此可以围起来),但并没有形成一体。这个解答可适用于任何厚度合理的墙,它在土地面积和墙面长度上的正确性是如此显然,以

致没有必要再作解释。不过,我只是说一下,每位租户让给他邻居的那个半圆形地块,正好等于他邻居让给他的那个半圆形地块,而每家花园中的任何一块墙面,也会在其他三家花园中一模一样地重复出现。当然,有无穷多种方法可以把这个解答变形为其他同样正确的解答。

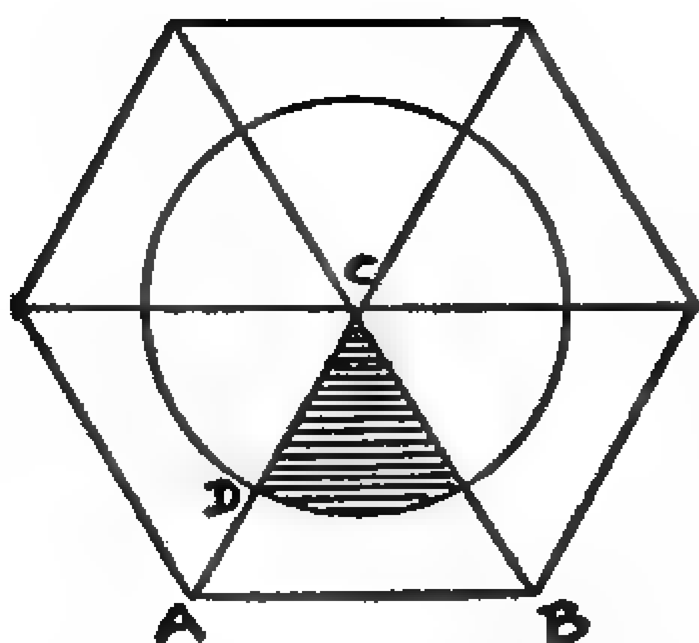
195. 贝琳达小姐的花园

贝琳达小姐需要做的事只是这些:她应该从 A 量到 B,把她的卷尺一折为四,标出点 E,即这条边长的四分之一处。然后用同样的方法标出点 F,即 AD 边的四分之一处。现在,如果她令 EG 等于 AF,令 GH 等于 EF,那么 AH 就是为了使花坛面积正好是花园之一半而需要的道路宽度。只有当这两条边长的平方和是一平方数的时候,才能获得一次准确的数值测量结果。比方说,如果花园的尺寸是长 12 杆宽 5 杆(于是 12 的平方为 144,5 的平方为 25,两者之和为 169,即 13 的平方),那么 12 加上 5,再减去 13,等于 4,它的四分之一,即 1 杆,就是这条道路的宽度。



196. 被拴住的山羊

如果解法得当,这道题目真是很简单。设下页图中三角形 ABC 代表我们那块半英亩的牧场,其中阴影部分代表山羊被一

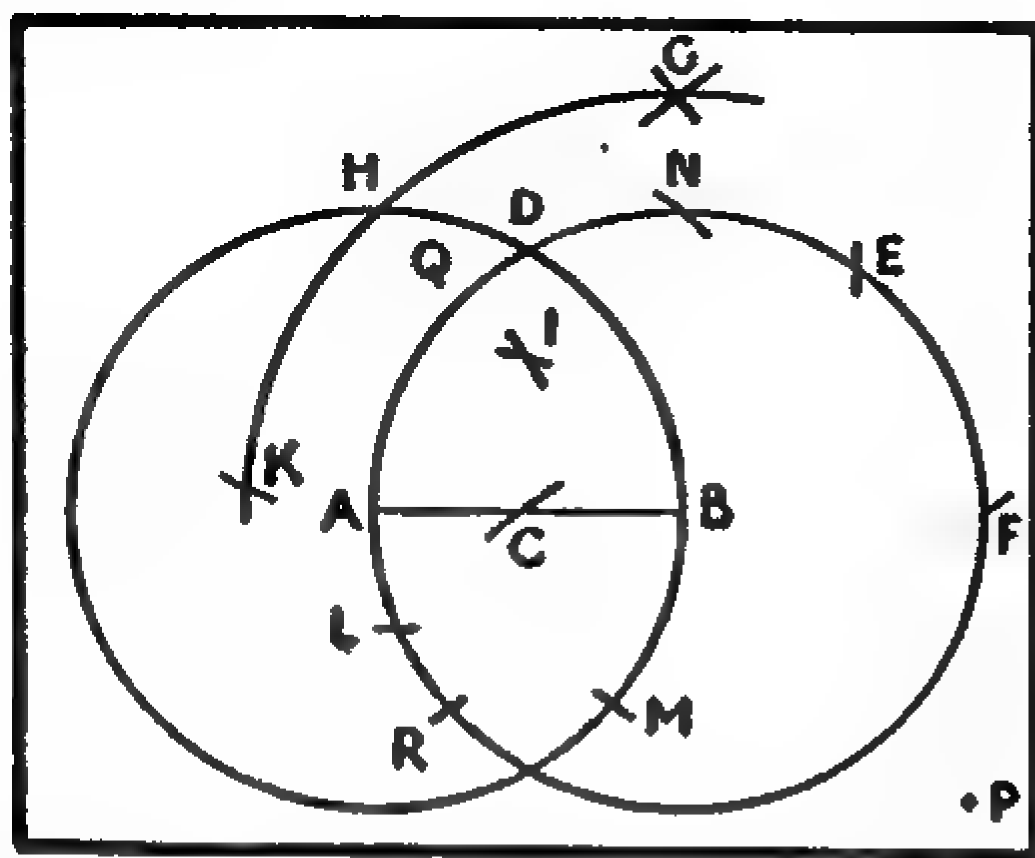


根拴绳拴在角顶点 C 处时它所能啃食到的四分之一英亩草地。好，六个同样的等边三角形放在一起会形成一个正六边形（如图所示），因此阴影部分草地的面积显然就是整个圆面积的六分之一。于是我们所要求的只不过是一个圆的半径（CD），而这个圆的面积为六个四分之一英亩或者说 $1\frac{1}{2}$ 英亩，它等于 9 408 960 平方英寸。由于我们只要求"舍入到最接近的整数英寸"的答案，因此就我们的目的来说，如果我们令 1 比 3.1416 等于这个圆的直径比它的周长，那就已经足够精确了。于是，如果把我给出的最后那个数除以 3.1416，再开平方，我们会发现 1731 英寸，即 48 码 3 英寸，就是所求的"舍入到最接近的整数英寸"的拴绳长度。

197. 圆规趣题

设下页图中的 AB 为给定的直线段。以 A 和 B 为圆心，以 AB 为半径作两个圆。标出 DE[①] 和 EF，它们都等于 AD。以 A 和 F 为圆心，以 DF 为半径作圆弧交于 G。以 A 和 B 为圆心，以 BG 为半

① D 为刚作出的那两个圆的一个交点，如图。以下对新作出的点的位置不再一一说明，请读者参看插图。—— 译者注



径，作出点 N 和圆弧 GHK，其中 HK 等于 AB。令 HL 等于 HB。接下来以 K 和 L 为圆心，以 AB 为半径作圆弧交于 I。令 BM 等于 BI。最后，以 M 为圆心，以 MB 为半径作圆弧交那条直线段于 C，则点 C 即为所求的直线段 AB 之中点。如果要更加精确，你可以以 A 为圆心标出 R(就同你以 B 为圆心标出 M 一样)，然后以 R 为圆心再作一条圆弧过 C 点。这同时也解决了这样一个问题：给定两点，但这两点间的连线没有给出，求出这两点连线的中点。

我将使年轻的几何学家能够获得一个严格的证明。首先证明直线段 AB 的平方的两倍等于距离 BG 的平方，由此可知 HABN 是一个正方形的四个顶点。为证明 I 是这个正方形的中心，从 H 出发经过 B 作一条直线，与弧 HK 的延长部分交于 P①。接下来，设想这条必需的直线已经作好，角 HKP 是直径所对的圆周角，因此是直角。向 HP 作垂线 KQ，通过三角形的相似，并根据 HKI 是等腰三角形这个事实(由作图)，可以证明 HI 是 HB

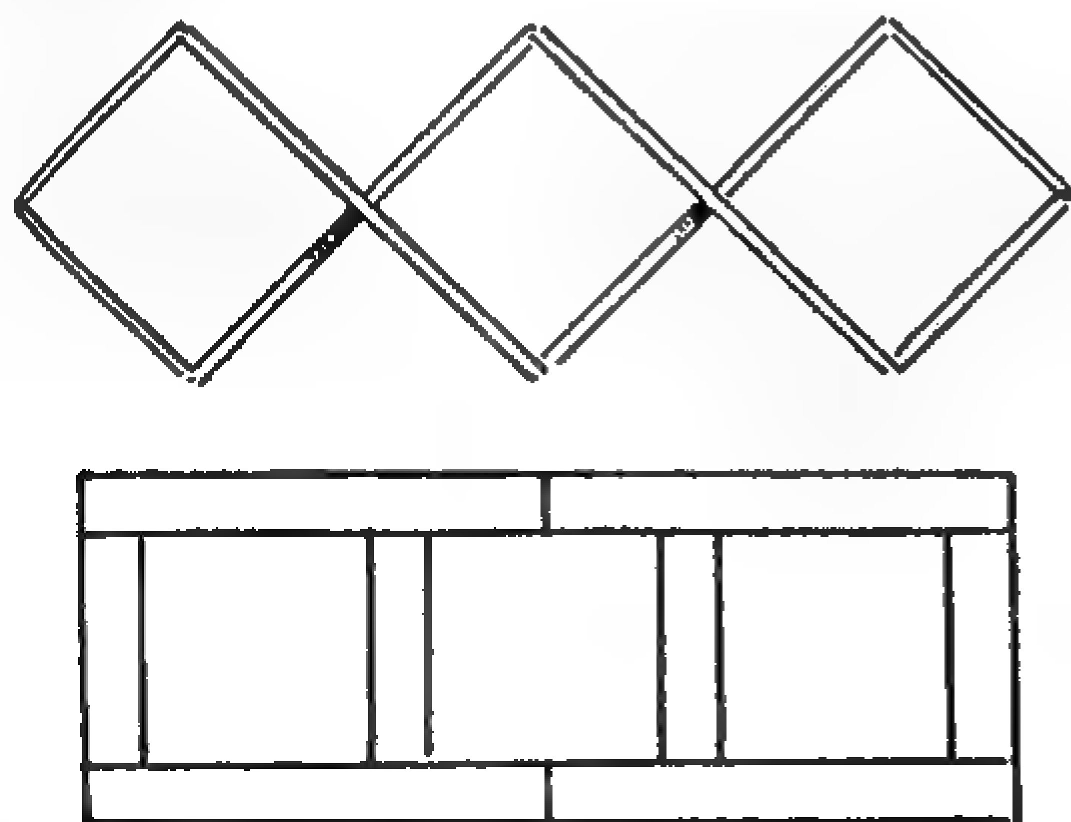
① 原文若直译是"从 H 出发过 Q、I、B 作一条直线到 P，并将弧 HK 延长到 P"。但点 Q 的位置尚未交代，点 I 在 HB 上这件事尚待证明，对于点 P 的位置的描述也不甚妥当，故改作现译。—— 译者注

的二分之一[①]。同样可以证明,C 是以 A、I、B 为三个顶点的正方形的中心。

我知道这并不是最简单的解法。

198. 八根棍子

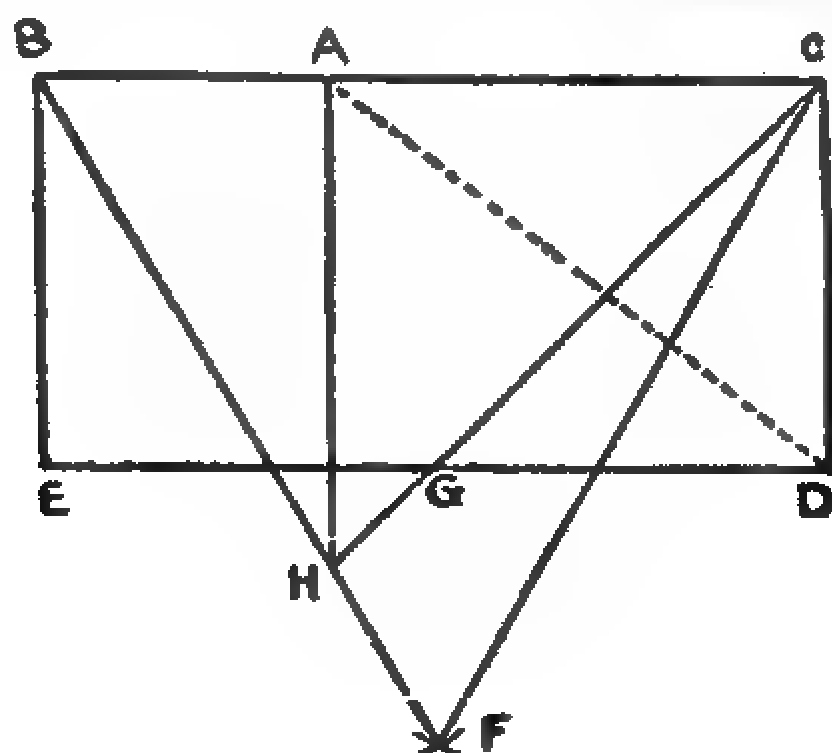
下面第一幅草图是几乎每个人都会对这道趣题给出的答案,而且乍看上去似乎十分令人满意。但是请想一想题目的条件。我们必须"把每一根棍子都平放在桌子上"。好,如果一架梯子靠在墙上,只有一头放在地上,这也许就不能说它是"平放在地上"。而如果我们把棍子以如上方式放置,那么只可能使棍子的一头接触桌子:说每一根棍子都平放在桌子上就不对了。为了得到一个解答,只能让我们的棍子具有适当的尺寸。比方说每根长棍子的长度为 2 英尺,而短棍子为 1 英尺。然后这些棍子必须有 3 英寸宽,这样才可以围成三个正方形,如第二幅草图所示。如果我说的是"火柴"而不是棍子,这道趣题就不可能有解答了,因为一根普通的火柴,其长度大约是宽度的二十一倍,围出的矩形不会是正方形。



① 而且 I 在 BH 上。——译者注

199. 爸爸的趣题

我发现有许许多多的人都以为下面这种说法就是这道题目的正确答案。他们用下图中的字母论证道，如果你使距离 BA 是 BC 的三分之一，从而使矩形 ABE 的面积等于留下的那个三角形的面积，那么把这块纸板吊起来其长边一定会保持水平。读者们还记得查理二世[①]开的那个玩笑吧。这位国王让皇家学会开会讨论：为什么把一条活鱼放入一个贮水的容器后，容器里的水却没有升高？会开到一半的时候，与会者中一个最没有名气的人偷偷溜出去做了这个实验，结果他发现，水其实是升高了！如果我的来信者们用一块纸板同样做一下实验，他们立刻就会发现他们错了。面积是一回事，重力作用完全是另一回事。那个三角形把腿伸到了 D 点，这件事的后果得由另外的矩形面积来抵消。事实上，BA 与 AC 的比例是 1 与 3 的平方根之比，后者不能以准确值给出，但它的近似值是 1.732。现在让我们来看看正确的一般解法。有多种方法都可以得到这个预期的结果，但是我给出一种方法，我认为它对于初入门的人来说是最简单的。



① 查理二世(Charles Ⅱ,1630—1685)，英国斯图亚特王朝的国王。——译者注

把你的纸板固定在一张纸上，作出等边三角形 BCF，其中 BF 和 CF 都等于 BC。再标出点 G，使得 DG 等于 DC。作线段 CG，并将它延长，交 BF 于 H。现在如果我们作 HA 平行于 BE，那么从 A 点到 D 点就是我们的剪切所必须遵循的线路，如那条虚线所示。

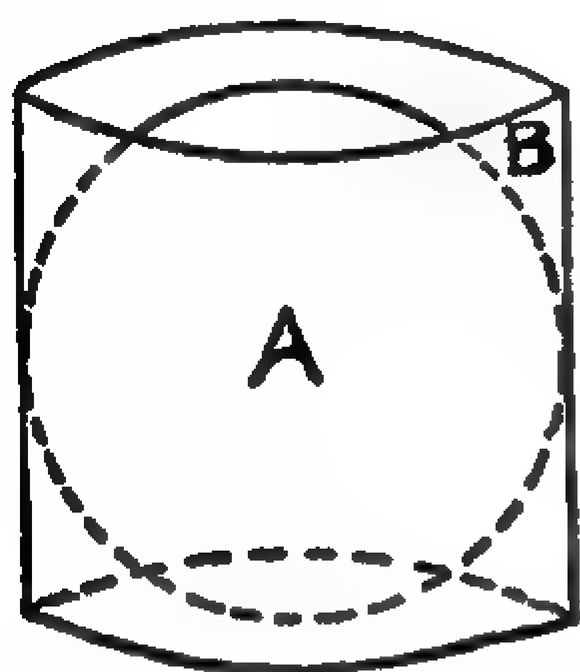
关于这道题目，一个奇特的地方就是 A 点的位置与 CD 边无关。这件事的理由，在我给出的这个解法中表现得比我所看到的其他任何解法都要明显，这就是我偏爱这个解法的部分原因（虽然在其他一些解法中，所有的操作可以在纸板上完成）。你马上会看到，不管你把 E 与 B、D 与 C 靠得有多近，从而把这纸板的宽度减得有多小，线段 CG 作为一个正方形的对角线，总是保持着固定的方位，它必定交 BF 于 H。最后，如果你想得到距离 BA 的近似值，你要做的只是把纸板的长度乘以小数 0.366。比方说，如果这块纸板长 7 英寸，我们就得到 $7 \times 0.366 = 2.562$，即$2\frac{1}{2}$英寸多一点，作为从 B 到 A 的距离。

不过这道趣题所开的真正玩笑是在这里。我们已经看到，A 点的位置与纸板的宽度无关，它完全依赖于长度。好，就在题目的插图中，你会发现那两块纸板具有同样的长度；结果，这位小姑娘要做的只是：把剪去一块的纸板放在另一块纸板的上面，在后者上标出 A 点，使得它与纸板左上角的距离与前者上的 A 点一样！因此，帕普斯的趣题，既然是给他小女儿做的，毕竟是一道完完全全的小孩子题目，他可以向她演示怎样来完成这一壮举，用不着先给她介绍静力学和几何学的基本知识。

200. 一道关于放风筝的趣题

我大体发现，这道小趣题的解答者可粗略地分成两类：一类

是用多少有点复杂的计算，包括用到 π，得到了误差在一英里之内的答案；另一类则把他们的算术风筝放到了离实际情况几百英里甚至几千英里远的地方。我即将给出的这个相对容易的解法，一点儿都没有涉及圆的直径与周长之比。我把它叫做“帽盒方法”。



假定我们把这个球 A 放到一个圆柱形的帽盒 B 里，而且正好合适，也就是说它不但与周围的圆柱形侧面接触，而且正好与其顶面和底面接触，如插图所示。接下来，根据人人都应该知道的一条亘古不变的定律，这个帽盒的体积正好比这个球的体积大二分之一。因此，既然球的直径是 24 英寸，那么一个同样周长但高为球直径的三分之二（即 16 英寸）的帽盒将正好与这个球体积相同。

现在我们认为，这个高度减小了的帽盒，是由大量圆柱体状金属线小段像漆刷上的毛那样束在一起做成的一个金属圆柱体。根据趣题的条件，我们可以认为这些金属线小段之间没有空隙。这些一百分之一英寸粗细的小圆柱体要有多少个才能相当于那个 24 英寸粗细的大圆柱体呢？圆面积之比等于其直径平方之比，$\frac{1}{100}$ 的平方是 $\frac{1}{10000}$，24 的平方是 576，因此这个大圆柱体相当于 5 760 000 个圆柱体状金属线小段。但是我们已经看到，这些金属线都是 16 英寸长，于是那根金属线的全长为 16 × 5 760 000 = 92 160 000 英寸。把它化为英里，得到 1454 英里 2880 英尺。这就是系在教授风筝上的金属线长度。

一只风筝会不会飞到这样一个高度，或者能不能经受得住

这样一个重量，这并不是我们这道题目要考虑的问题。

201. 怎样做蓄水箱

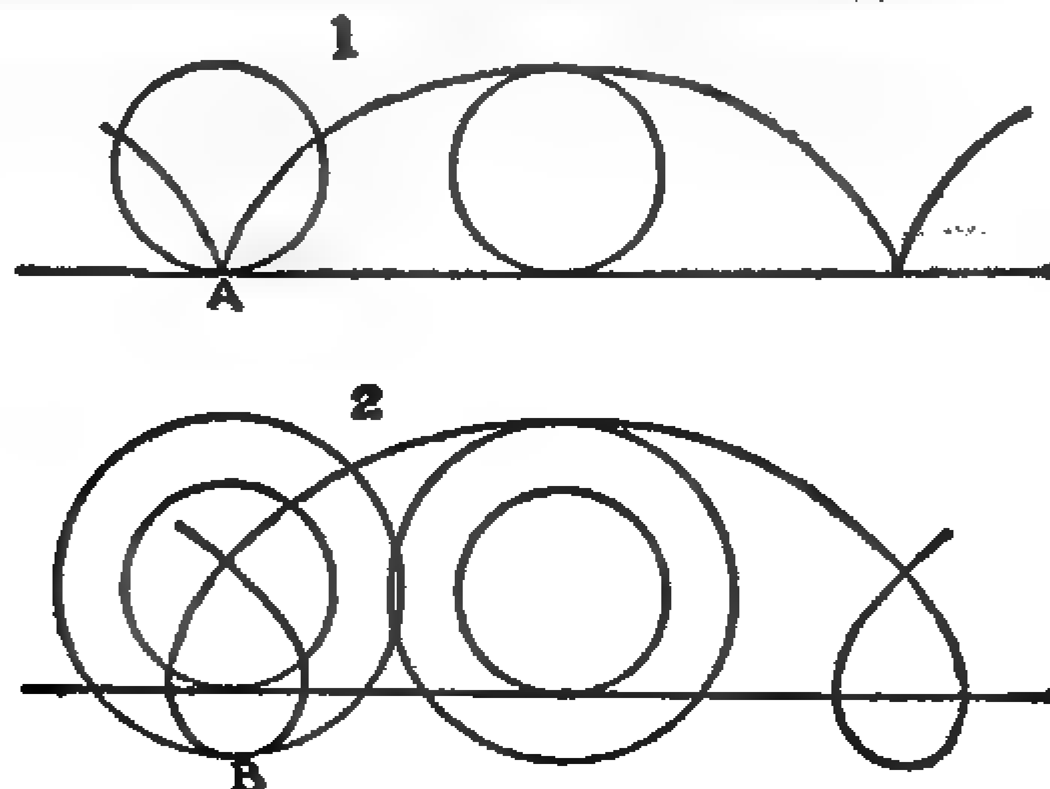
这儿是一个解决这道题目的一般公式。称这矩形的两条边为 a 和 b，那么$\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$就等于要割去的正方形小块的边长。题目给出的尺寸是长 8 英尺宽 3 英尺，代入上述公式计算，得 8 英寸，这就是必须割去的正方形小块的边长。当然，并不总能像这样得出准确值(原因在于那个开平方)，但是你可以用小数，使它与准确值要多近就多近。

202. 圆锥趣题

这条简单的规律就是：必须先在圆锥高度的三分之一处横切一下。

203. 关于轮子

如果你在一个轮子的周边上标定一个点 A，让这个轮子像普通大车轮子那样在平坦的路面上滚动，那么这个点所描出的曲线就是通常的摆线，如图 1 所示。但如果你在一个火车轮子轮

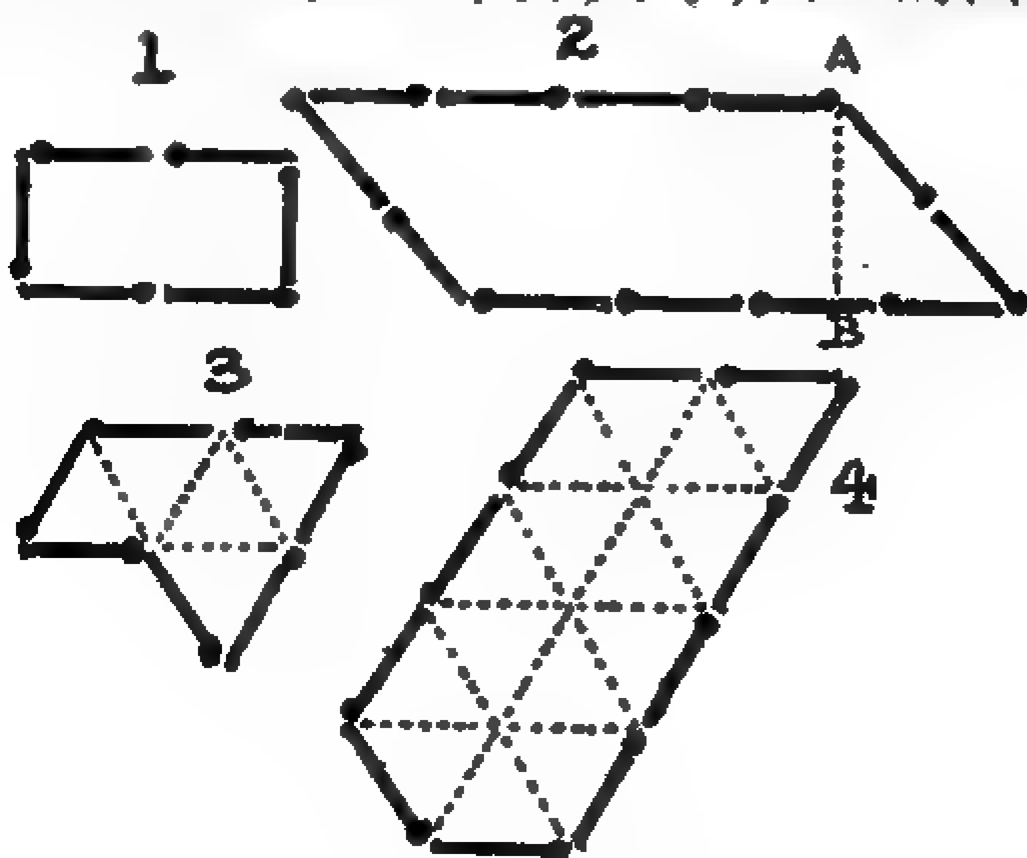


缘的周边上标定点B,那么这条曲线将是一条短辐旋轮线,如图2所示,上面长出了一个个的"瘤"。现在,如果考察这些"瘤"或者说这些圈中的一个,我们就会看到,"在任何给定的瞬间",这个圈底部附近的一些点一定是背着火车前进的方向运动。由于在轮缘的周边上这样的点有无穷多个,因此当火车处于运动状态时,一定是描出了无穷多个这样的圈。其实,在任何给定的瞬间,轮缘上总有一些点在朝着与火车前进方向相反的方向运动。

在那两个轮子的情况中,围着静止轮子滚动的那个轮子绕着自己的中心转了两圈。由于这两个轮子大小一样,因此很显然,如果一开始我们在上方轮子的周边上标个点,就标在顶上,那么当这个轮子滚了一半路程而处于其最底位置的时候,这个点将与下方轮子接触。于是这个点再次位于滚动轮子的顶上,这个轮子转了一圈。因此,当它完成全部路程时就转了两圈。

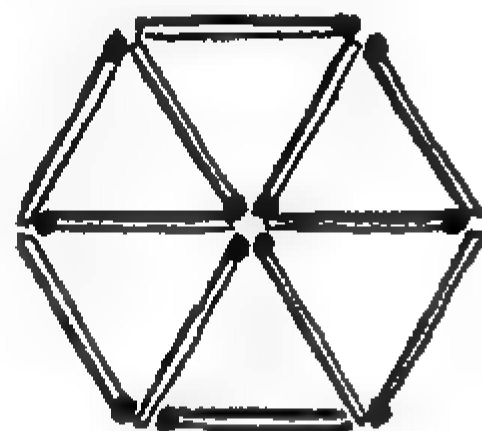
204. 一道新的火柴趣题

(1) 最容易的方法是将这十八根火柴摆放得如图1和图2所示,其中垂线AB的长度是一根半火柴。于是,如果火柴是一英寸长,那么图1的面积是二平方英寸,图2的面积是六平方英



寸——$4\times1\frac{1}{2}$。(2) 第二种情况稍稍有点难解决。解答由图3和图4给出。为了说明，暂时将一些火柴放在虚线处。于是可以看到，图3包含了五个相等的等边三角形而图4包含了十五个这样的三角形，一个图形是另一个图形的三倍大，而且用了正好十八根火柴。

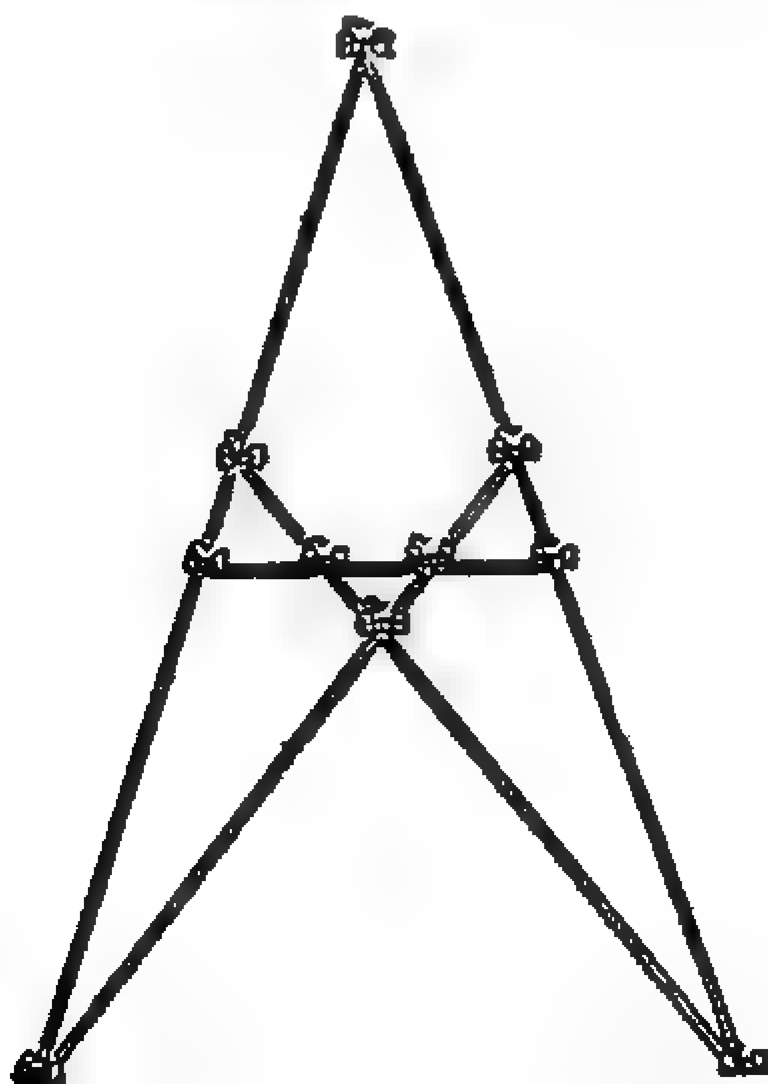
205. 六个羊圈



将这十二根火柴以如图所示的样式摆放，你就会得到六个同样大小的羊圈。

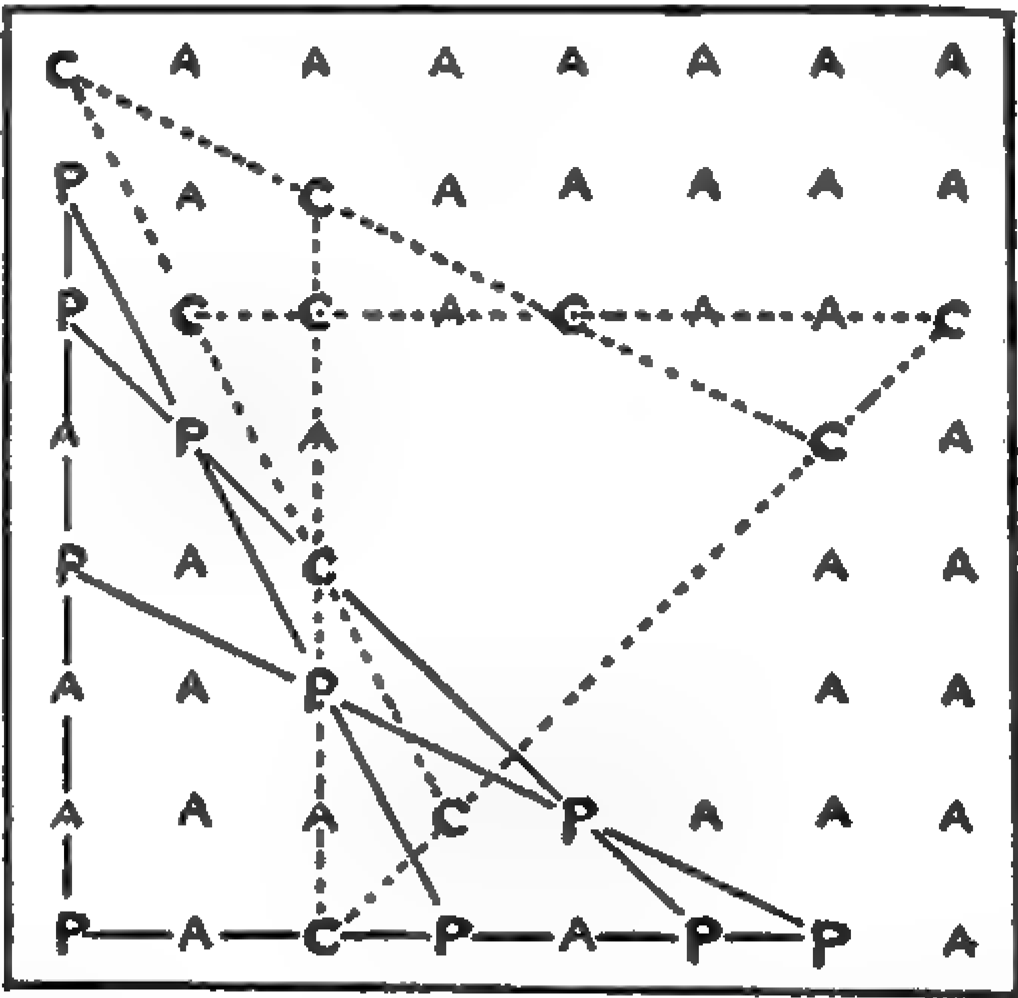
206. 国王与城堡

把这十座城堡建造得能连成五行、每行有四座城堡的方式有多种多样，但是下图所显示的是唯一还使得其中两座(这是最大的数目)城堡不能从外面直接抵近的布局方式。可以看到，你必须翻过墙才能抵达这两座城堡。



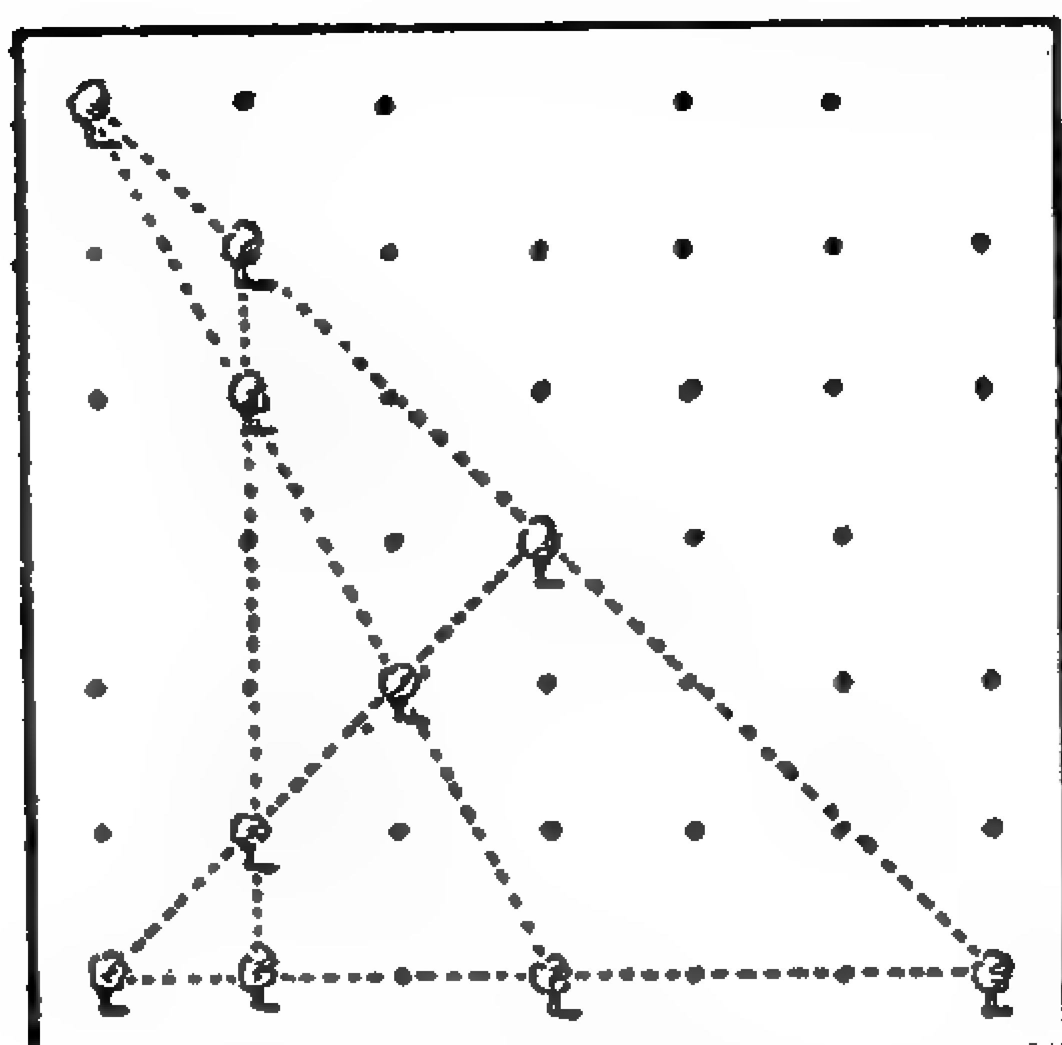
207. 樱桃树和李子树

如果没有樱桃树和李子树在果园北面和东面的边上种得尽可能少这个条件，那么用以解决这道题目的方式有好几种。最好的布局方式如这幅草图所示，其中樱桃树、李子树、苹果树分别用 C、P、A 表示。虚线把樱桃树连了起来，实线把李子树连了起来。可以看到，那十棵樱桃树和十棵李子树种得各自能连成五条直线，每条直线上有四棵相应种类的树。这是唯一使得种在果园北面边上和东面边上的樱桃树或李子树少到只有两棵的布局方式。



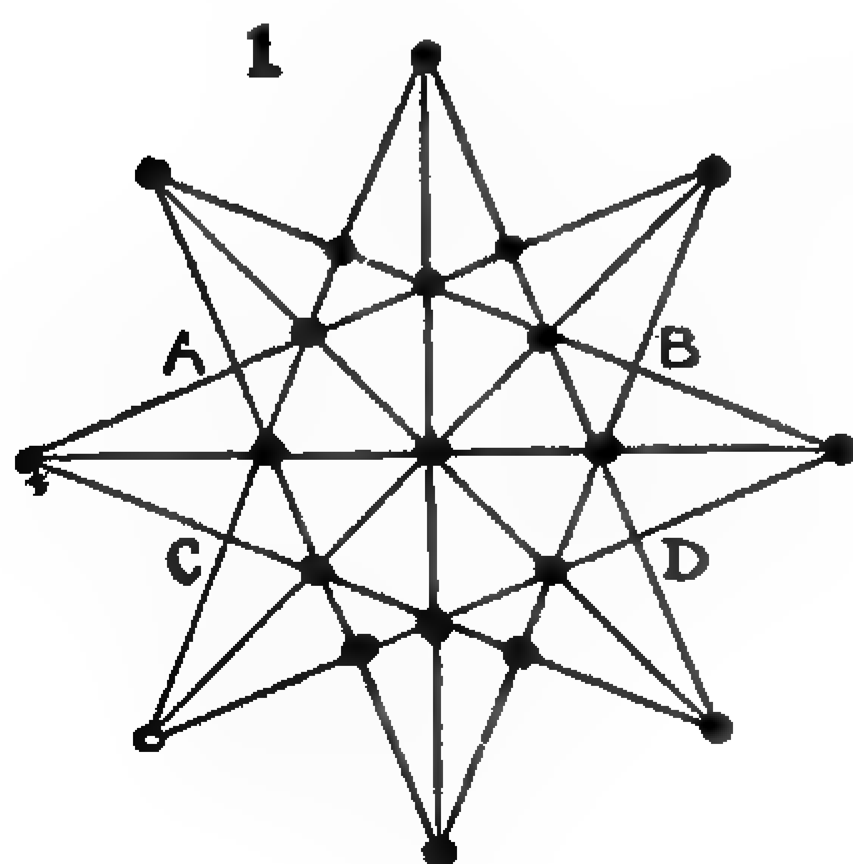
208. 一道关于种植园的趣题

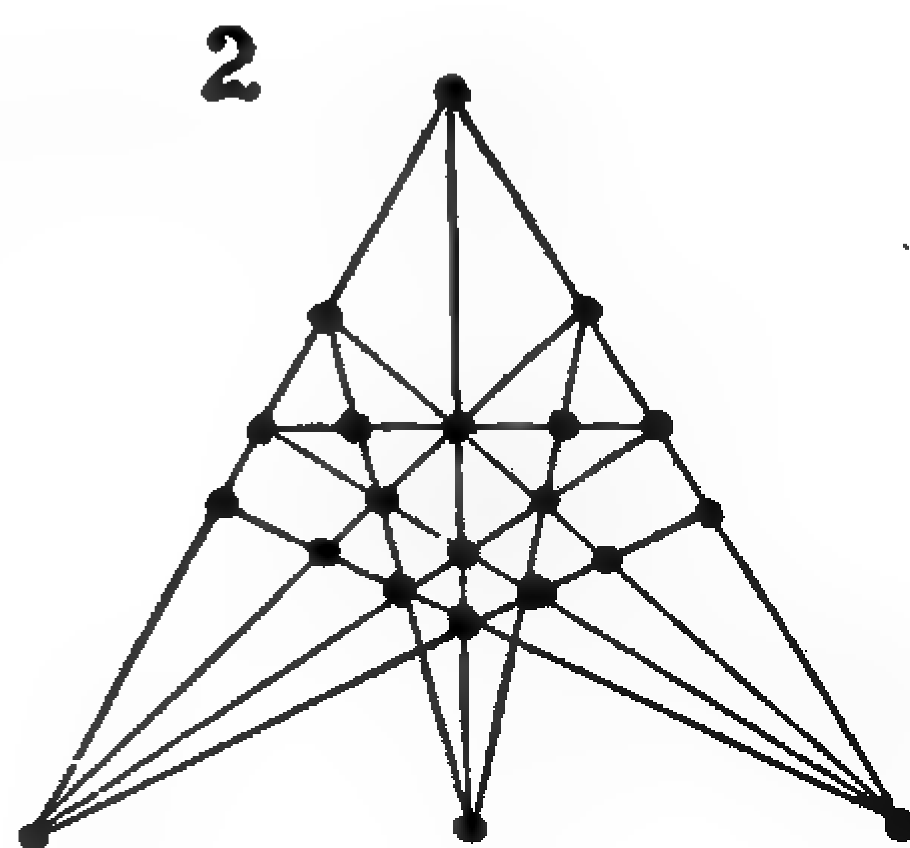
下页这幅插图显示了必须留下的那十棵树，它们可连成五行，每行有四棵树。那些点子代表被砍倒的树的位置。



209. 二十一棵树

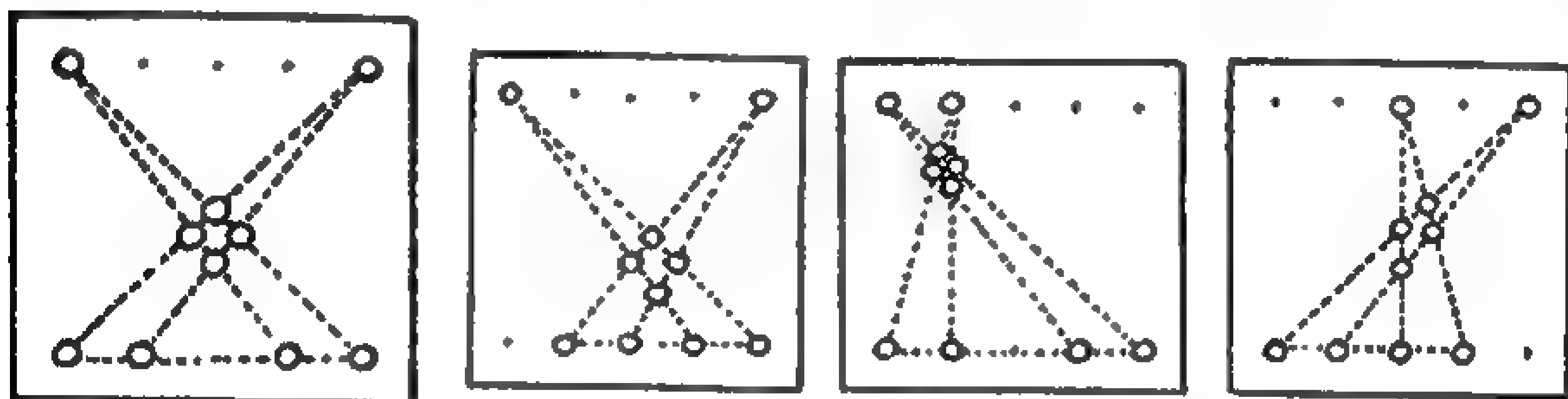
我给出两个令人赏心悦目的布局方式。每种方式都是十二行,每行五棵树。





210. 十枚硬币

答案是正好有2400种不同的方式。可以从一边拿走任何三枚硬币而从另一边拿走任何一枚硬币。我在下面给出了四个例子[①]。于是我们从顶行挑走三枚可以有十种方式，而从底行挑走一枚则有五种方式，配合起来一共有五十种方式。但我们还可以有从底行挑走三枚而从顶行挑走一枚的五十种方式。这样我们挑走四枚的方式一共有一百种，而这四枚硬币通过换位可以有二十四种排列方式，因此一共有24 × 100 = 2400个不同的解[②]。



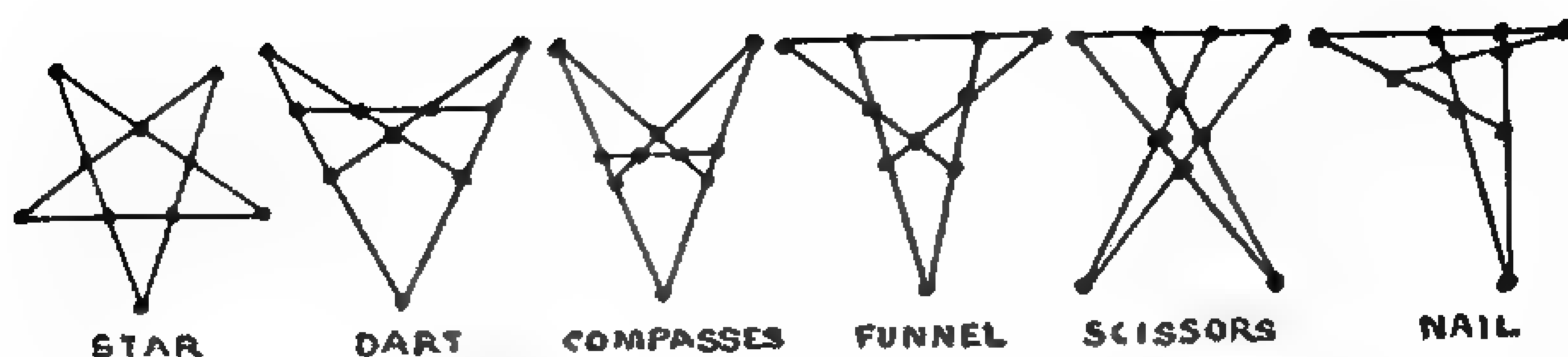
迄今我所给出的点与线趣题，除了上面那道题外，都是以各种形式要求把十个点摆放得能连成五条直线，每条直线四个点，因此对这种具体情况予以一般的考虑将是有所裨益的。一共有六个基本解，如下页的六幅草图所示，不会再有其他的了。出于方便，我在几年前把它们命名为“星星”、“飞镖”、“圆规”、“漏斗”、“剪刀”和“钉子”。读者会明白，可把这些图形中的任何一种变形为无穷多种不同的样式而不会破坏其本质特性。

---

① 为什么不考虑从每边各拿走两枚或从一边拿走四枚而另一边不动的情况？其实，从下面给出的六个基本解即可知：在任何一个解中，(1) 凡三点成一线，这条线上必定有第四个点；(2) 不可能五点成一线。因此，每边各拿走2枚将与(1)矛盾，有一边原封不动则与(2)矛盾。—— 译者注

② 如果把相互全等的点线构形看作同一个解，那么本题其实只有26个本质上不同的解。—— 译者注

答　案



STAR:星星　*DART*:飞镖　*COMPASSES*:圆规
FUNNEL:漏斗　*SCISSORS*:剪刀　*NAIL*:钉子

在“国王与城堡”中，我们有“星星”，而其解答则给出了“圆规”。在“樱桃树和李子树”的解答中，我们发现樱桃树构成了“漏斗”而李子树构成了“飞镖”。“种植园趣题”的解答是变了形的“飞镖”的一个实例。“十枚硬币”的任何一个解都将表现为一把“剪刀”。于是除了“钉子”外，这些基本解的例子都给出了。

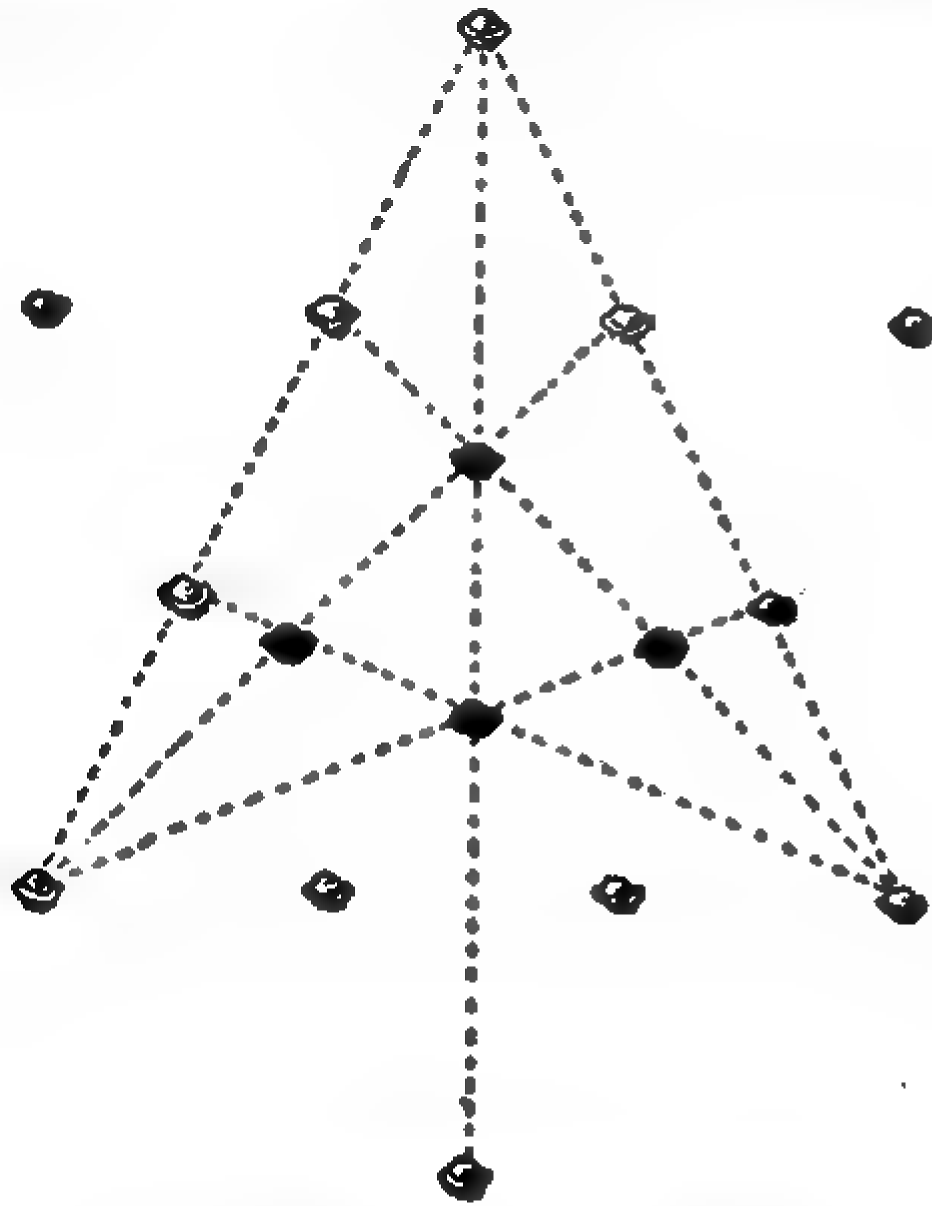
在一张缩减了的7×7国际象棋棋盘上，我们正好能以三种样式把十个兵摆放得符合上述条件，但它们都只能构成“飞镖”。“种植园”显示了一种样式，李子树显示了第二种样式，读者可能愿意自己去找出第三种样式。在一张通常的8×8国际象棋棋盘上，我们还可以放入“漏斗”的一个漂亮实例——它关于棋盘的对角线对称。能容得下“星星”的最小棋盘是9×7的棋盘。“钉子”需要一张11×7的棋盘，“剪刀”需要11×9的棋盘，而“圆规”则需要17×12的。这些至少是我笔记本上记录的最好结果，它们可能会被打破，但我不这样认为。

如果你沿一条对角的锯齿线把一张棋盘一分为二，使得分下的较大部分有36个格子，较小部分有28个格子，那么你可以在较大部分摆放三个相互分离的构形，而在较小部分摆放一个构形(它们都是“飞镖”)，而且互不冲突——也就是说，它们占据着四十个不同的格子。如果不把棋盘划分开来，这些构形则能以其他样式摆放出来。能容纳六个不同的构形(它们并非不同

的基本解)、而且其中一构形的任一条直线都不与另一构形的直线相交的最小的正方形棋盘,是 14 × 14 的棋盘;能容纳一个完全被另一构形的直线所包围的构形、而且此构形的任一条直线从一点画到另一点时都不与另一构形的直线相交的最小棋盘,是 14 × 12 的棋盘。

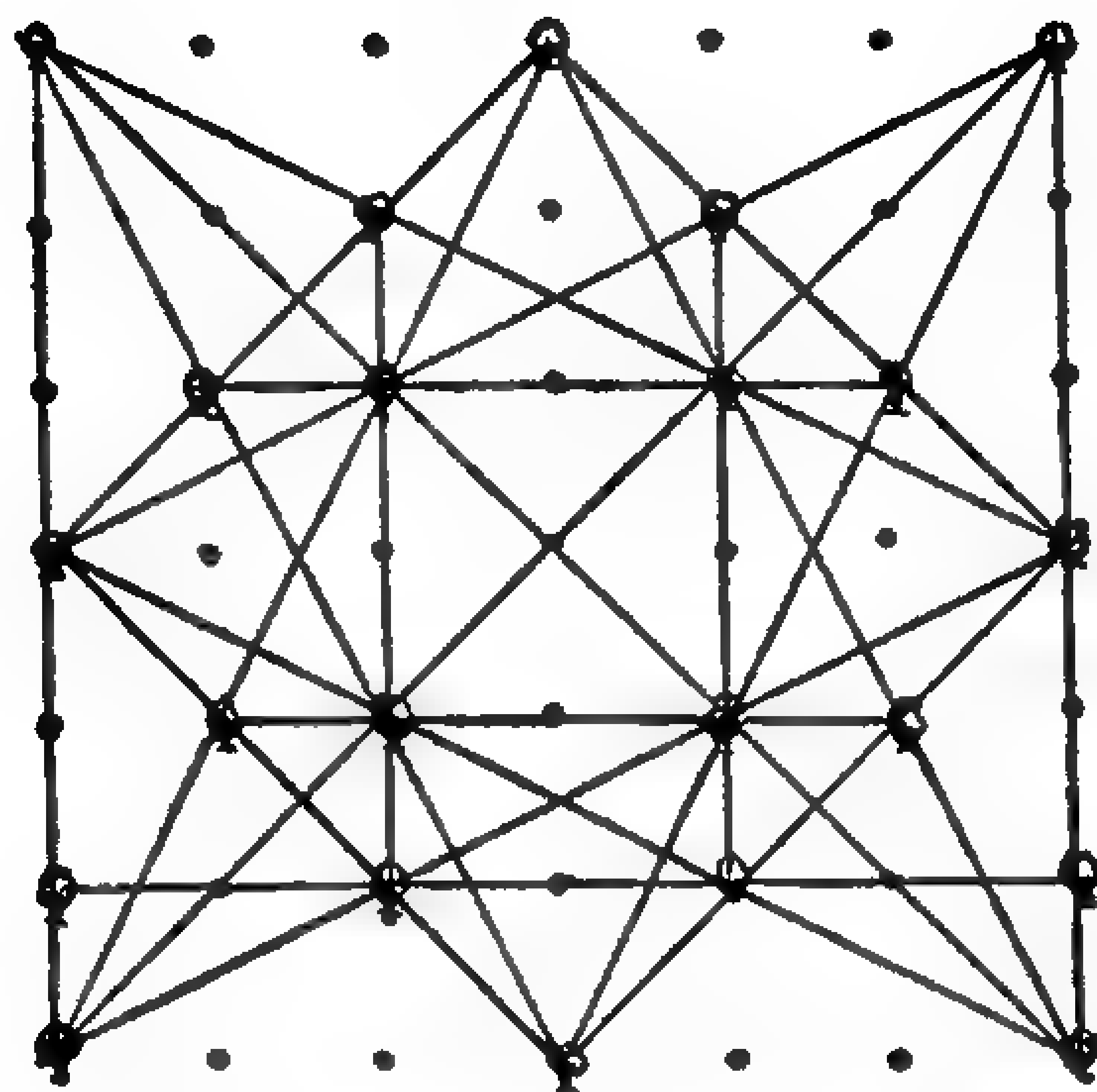
211. 十二块馅饼

如果你不管那四块黑馅饼,那么其余十二块馅饼都在它们原来位置上。现在把其中四块分离的馅饼挪到四块黑馅饼所占据的位置,你就能把它们连成七行,每行四块馅饼,如虚线所示。



212. 缅甸的种植园

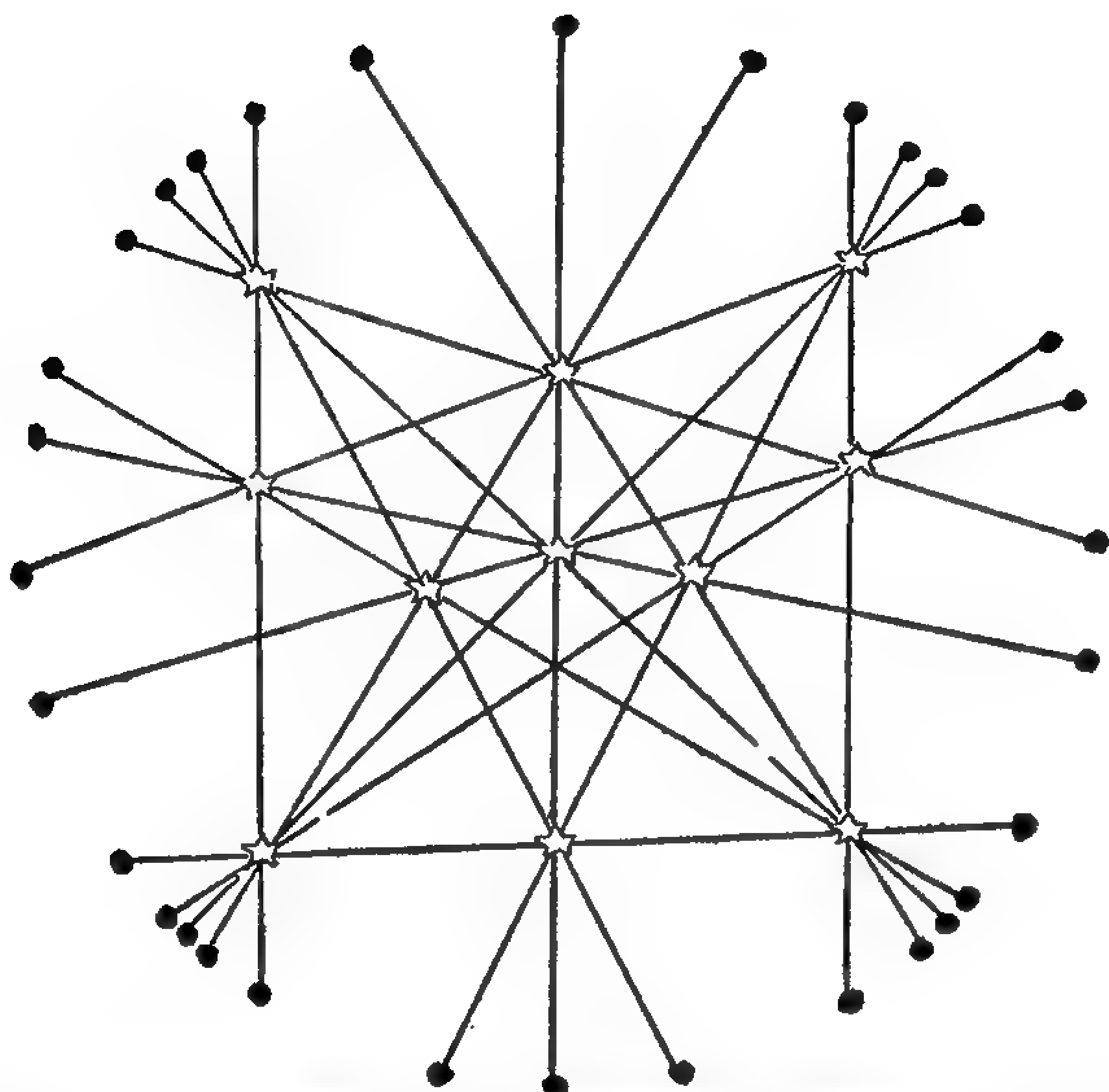
下页给的布局方式是所能求得的结果为二十一行的答案中最为对称的,而且我认为,这就是最大的行数了。有好几种方法可以达到这个最大行数。



213. 土耳其人与俄罗斯人

主要问题是求出这支俄罗斯军队可能有的的最少人数。由于敌人从四面八方开火，因此很显然，必须求出至少要有多少个脑袋，才能连成十六条直线而且每条直线上有三个脑袋。注意，我是说十六条直线，而不是三十二条直线，这是因为任何一条由一颗子弹所走的直线，也可以是从正好相反的方向射来的另一颗子弹所走的直线。好，那么只要有十一个点，或者说十一个脑袋，就可以把它们摆放得能连成所要求的十六条直线，每条直线上有三个点或者说三个脑袋。但是具体怎样摆放，却是一根难啃的硬骨头。下页的这幅草图显示了这件事应该怎样做。

于是，如果十一名俄罗斯军人处于五角星所表明的位置，而三十二个土耳其人处于黑点所指示的位置，你就会看到，如那些直线所示，每个土耳其人都可以射出一颗紧贴着三名俄罗斯军人的头皮飞过的子弹。但由于每颗子弹打死一人，因此只能是每个土耳其人打死了他的一名同胞，而反过来他自己又被这名同



胞所击毙。如果不是这样，我们就得提供另外的俄罗斯人来让他们射中，这就对我们正确解答这道题目造成了毁灭性破坏。由于是同时开火，所以上述情况没有导致什么难以理解的地方。于是我们看到，答案是至少有十一名俄罗斯军人，无人阵亡，而三十二个土耳其人相互射杀，全部阵亡。题目没有说俄罗斯人是否开火，但很显然，即使他们开了火，也不会有效果。这是因为：如果他们射出的子弹中有一颗杀死了一个土耳其人，那么我们就得提供另一个人让土耳其人的一颗子弹来射杀；而已知土耳其人一共三十二个，这就使我们必须再引进一名俄罗斯军人，当然，这就破坏了这个解答。我重复一下，这道趣题的难处在于怎样摆

放这十一个点，使得它们能连成十六条直线，每条直线三个点。据我所知，这件事的可行性是大约二十年前由威尔金森牧师大人(Rev. Mr. Wilkinson)发现的。

214. 六只跳蛙

按下述次序移动跳蛙：2,4,6,5,3,1(将这些步骤以同样的顺序再重复两次),2,4,6。这个解答用了二十一步——这是最小的步数了。

如果跳蛙的只数 n 是偶数，那么我们需要 $\frac{n^2+n}{2}$ 步，其中 $\frac{n^2-n}{2}$ 步是跳越，而 n 步是纯粹的移动。如果 n 是奇数，那么我们需要 $\frac{n^2+3n}{2}-4$ 步，其中 $\frac{n^2-n}{2}$ 步是跳越，而 $2n-4$ 步是纯粹的移动。

对于偶数的情况，为求得其步骤，将所有的偶数按升序写下来，接着将所有的奇数按降序写下来。这个数列必须重复 $\frac{n}{2}$ 次，后面接上按升序排列的偶数，只要接一次即可。例如，对于 14 只跳蛙，解答是将(2,4,6,8,10,12,14,13,11,9,7,5,3,1)重复 7 次，后面接上 2,4,6,8,10,12,14。总共是 105 步。

对于奇数的情况，是将偶数按升序写下来，接着将奇数按降序写下来，将这个数列重复 $\frac{n-1}{2}$ 次，接上按升序排列的偶数(删去 $n-1$)，再接上按降序排列的奇数(删去 1)，最后是按自然顺序排列的所有数(偶数和奇数，但删去 1 和 n)。例如，对于 11 只跳蛙，解答是：(2,4,6,8,10,11,9,7,5,3,1)重复 5 次，2,4,6,8,11,9,7,5,3，以及 2,3,4,5,6,7,8,9,10。总共是 73 步。

这个完整的一般性解答是第一次发表在这里。

215. 蚱蜢趣题

按下述次序移动筹码。括号中的步骤要连续进行四次。12,1,3,2,12,11,1,3,2,(5,7,9,10,8,6,4),3,2,12,11,2,1,2。于是用四十四步就可把蚱蜢的排列顺序反过来。

这道题目的一般解答十分难。当然,如果我们不期望用最少的步骤,那么它总可以用上一道趣题解答中给出的方法解决。但是要采用一种绝对节省的走法,我们就要考虑两个关键点。这里的筹码移动总可分为两类,一类我称为下部移筹(L),另一类称为上部移筹(U)。L是将某些大编号的筹码(例如我们这道"蚱蜢趣题"中的第12、11、10号)与某些小编号的筹码(例如第1、2、3号)交换位置;前者沿顺时针方向走,后者沿逆时针方向走。U是将中等编号筹码的排列顺序反过来。可以看到,在上面这个关于12枚筹码的解答中,12、11号筹码和1、2、3号筹码进行了L移筹,而4、5、6、7、8、9、10号筹码进行了U移筹。L移筹要走16步,U移筹要走28步,总共是44步。我们也可以令10号筹码参与L移筹,这将使得L移筹要走23步,U移筹要走21步,总共也是44步。我把它们称作第一种方法和第二种方法。其他任何方案都会导致步数增加。不论是奇数枚筹码还是偶数枚筹码,你总可以有这样两种方法(它们的节省程度是一样的),但是关键在于要确定到底有多少枚筹码要进行L移筹,有多少枚筹码要进行U移筹。下页是用表格形式给出的解答。但首先要注意,n取具体数值时,n为2、3、4的情况是特例,它们分别需要3步、3步和6步,而对于n为5和6的情况,用第二种方法不能得出最小解——对它们只能用第一种方法。

我们可以更一般地说,对于m枚筹码,如果m是大于4的偶

第一种方法

筹码总数	L移筹		U移筹		总步数
	筹码数	步数	筹码数	步数	
$4n$	$n-1$ 和 n	$2(n-1)^2+5n-7$	$2n+1$	$2n^2+3n+1$	$4(n^2+n-1)$
$4n-2$	$n-1$ 和 n	$2(n-1)^2+5n-7$	$2n-1$	$2(n-1)^2+3n-2$	$4n^2-5$
$4n+1$	n 和 $n+1$	$2n^2+5n-2$	$2n$	$2n^2+3n-4$	$2(2n^2+4n-3)$
$4n-1$	$n-1$ 和 n	$2(n-1)^2+5n-7$	$2n$	$2n^2+3n-4$	$4n^2+4n-9$

第二种方法

筹码总数	L移筹		U移筹		总步数
	筹码数	步数	筹码数	步数	
$4n$	n 和 n	$2n^2+3n-4$	$2n$	$2(n-1)^2+5n-2$	$4(n^2+n-1)$
$4n-2$	$n-1$ 和 $n-1$	$2(n-1)^2+3n-7$	$2n$	$2(n-1)^2+5n-2$	$4n^2-5$
$4n+1$	n 和 n	$2n^2+3n-4$	$2n+1$	$2n^2+5n-2$	$2(2n^2+4n-3)$
$4n-1$	n 和 n	$2n^2+3n-4$	$2n-1$	$2(n-1)^2+5n-7$	$4n^2+4n-9$

数,我们要走$\frac{m^2+4m-16}{4}$步;如果 m 是大于 3 的奇数,就要走$\frac{m^2+6m-31}{4}$步。这样,我就向读者交代了怎样来算出任何情况下的最小步数,以及这些步骤的基本特征和移动方向。我让读者自己去发现怎样来确定实际的移动步骤。这可是一根硬骨头,需要对 L 移筹和 U 移筹进行细致的调整,使得它们能相互配合。

216. 有教养的跳蛙

下面的跳跃用十步解决了这道趣题:从 2 跳到 1,从 5 跳到 2,从 3 跳到 5,从 6 跳到 3,从 7 跳到 6,从 4 跳到 7,从 1 跳到 4,从 3 跳到 1,从 6 跳到 3,从 7 跳到 6。

217. 特威克纳姆趣题

按下述次序走筹码:K C E K W T C E H M K W T A N C E H M I K C E H M T。到了,这儿就是 Twickenham(特威克纳姆)。筹码所在的位置就决定了你是把它做一次跳跃还是做一次纯粹的移动。

218. 维多利亚十字架趣题

为解决这道趣题,要做成功两件事:第一件是操纵这些筹码,使得它们沿原来方向围绕着十字架应该读成 VICTORIA 这个词,只是首字母落在一条黑臂之中;第二件是用最少的步骤完成这一壮举。好,事实上,如果这个词的字母各不相同,那么第一件事是无论如何都完不成的;但这里有两个 I,因此把这两个字母换一下位置就能做成这件事——也就是说,把第一个 I 从第二位换到第七位,把第二个 I 从第七位换到第二位。但是我介绍

这道趣题时提到的稍有点不同凡响的一件事是：按以下这些词的顺序移动字母："A VICTOR! A VICTOR! A VICTOR I!"[①]就可以得到一个用了二十二步的解答。

不过，这道题恰有六个用了十八步的解答，下面是其中的一个：I(1)，V，A，I(2)，R，O，T，I(1)，I(2)，A，V，I(2)，I(1)，C，I(2)，V，A，I(1)。这个词中的第一个I和第二个I用数字1和2加以区别。

你会注意到，在上面给出的第一个解答中，有一个I从不移动，但是另一个I的移动导致它改变了自己的相对位置。这道题还有一个独特之处，我可以把它指出来——有一个用了二十八步的解答，它除了那两个I之外，不需要把任何字母移到中央分区。我还可以提一下，在每个用了十八步的解答中，字母C、T、O、R都只是移动了一次，而第二个I总是移动四次，V总是被转移到这十字架的右臂。

219. 字母滑块趣题

这道趣题可以用23步解决——这是最小的步数了。按下述次序滑动木块：A、B、F、E、C、A、B、F、E、C、A、B、D、H、G、A、B、D、H、G、D、E、F。

220. 出租屋里的一件难事

最简单的方法是按下述次序搬器具：钢琴、书橱、挂衣橱、钢琴、陈列柜、五斗橱、钢琴、挂衣橱、书橱、陈列柜、挂衣橱、钢琴、五斗橱、挂衣橱、陈列柜、书橱、钢琴。这样，必须要有十七步。然后女房东可搬动五斗橱、挂衣橱和陈列柜。多布森先生是不会在

① "一位胜者！一位胜者！一位胜者，那就是我！"——译者注

乎挂衣橱和五斗橱对换了房间的,他只要把钢琴弄到手就行了。

221. 八台机车

这道"八台机车"的解答如下:已经熄火因而不能移动的机车是5号机车。按下述次序移动其他机车:7、6、3、7、6、1、2、4、1、3、8、1、3、2、4、3、2。一共移动十七次,就使这八台机车按所要求的顺序排列了。

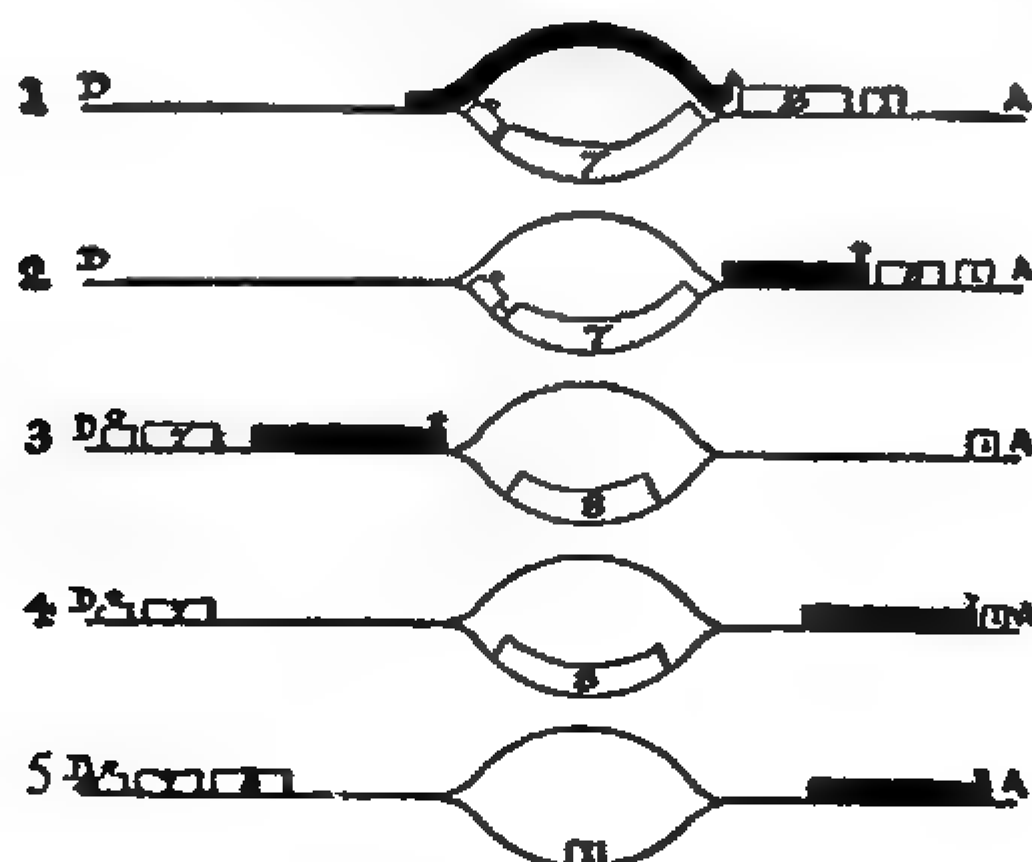
另外还有两个稍有点不同的解答。

222. 一道关于铁路的趣题

这道小趣题只要九步就可以解决。如下移动这些机车:从9到10,从6到9,从5到6,从2到5,从1到2,从7到1,从8到7,从9到8,最后从10到9。于是你将使得三个圆周的每一个上和三条直线的每一条上都有一台A机车、一台B机车和一台C机车。这是所有可行解答中最简短的。

223. 铁路上的一场混乱

只要反向六次就可以了。把白色列车(从A开向D的)分为



三组：机车和前7节车厢一组，中间8节车厢一组，最后1节车厢一组。黑色列车（从D开向A的）自始至终一节车厢都不脱钩。图1是原始位置，但白色列车的第二组（中间8节）和第三组（最后1节）都脱了钩。黑色列车前进到图2所示的位置（没有发生反向）。白色列车的第一组（机车和前7节车厢）向D前进，而黑色列车倒退，并把第二组8节车厢留在会车线上，占取图3所示的位置（第一次反向）。黑色列车来到图4所示的位置，挂上那单节车厢（第二次反向）。黑色列车倒退着把第二组推出会车线，并把那单节车厢留在那儿，然后便赶它的路去了，如图5[①]所示（第三次和第四次反向）。现在白色列车倒退进会车线，把那单节车厢挂上，然后直奔D而去（第五次和第六次反向）。

224. 停车库趣题

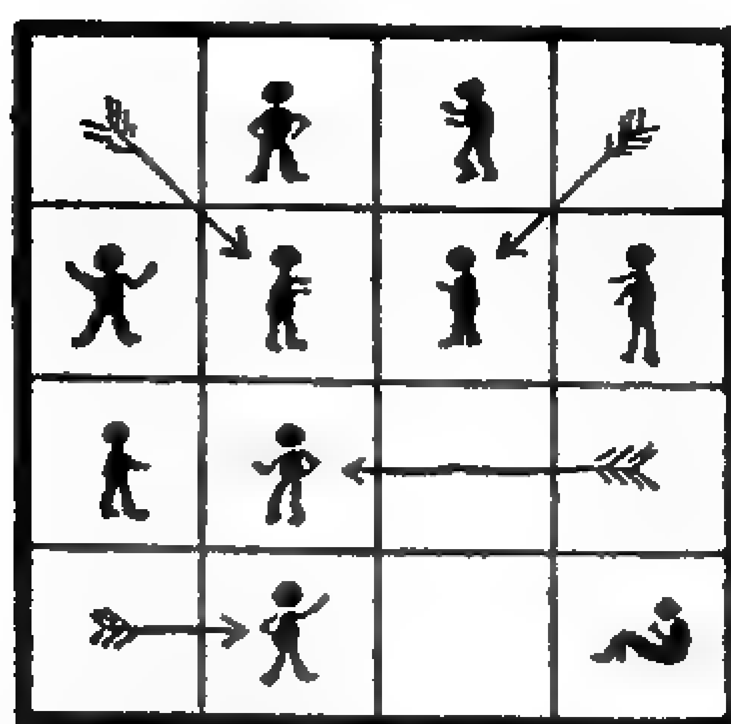
可以用如下四十三次移动使得汽车位置对换：6—G，2—B，1—E，3—H，4—I，3—L，6—K，4—G，1—I，2—J，5—H，4—A，7—F，8—E，4—D，8—C，7—A，8—G，5—C，2—B，1—E，8—I，1—G，2—J，7—H，1—A，7—G，2—B，6—E，3—H，8—L，3—I，7—K，3—G，6—I，2—J，5—H，3—C，5—G，2—B，6—E，5—I，6—J。当然，“6—G”就是指编号为“6”的那辆汽车移动到“G”这个车位。移动四十三次的方式还有几种。

225. 十名囚徒

从下页插图中我们看到，可以怎样把这些囚徒安排得形成多达十六个的偶数排。其中有4个竖直的，4个是水平的，5个与

---

① 原图错为6。——译者注



一条对角线平行,3 个与另一条对角线平行。这里的箭头显示了那四名囚徒的转移情况,而且可以看到,右下角那个年老体弱的人没有被转移。

226. 绕岸而行

要把词儿在所述条件下沿环放置,必须选择其中字母在某些相对位置上重复出现的词。例如,解决我们这道趣题的词就是 Swansea(斯旺西),其中第一个字母与第五个字母相同。我们按字母在词中的顺序如下完成跳跃:2—5,7—2,4—7,1—4,6—1,3—6,8—3。我们也可以放入一个像 Tarapur(达拉布尔)这样的词(其中第二个字母与第四个字母相同,第三个字母与第七个字母相同),步骤如下:6—1,7—4,2—7,5—2,8—5,3—6,8—3。不过 Swansea 是唯一合适的词,这很显然,因为它满足这道趣题的各个条件①。

这道趣题应该同我在第 341 题"四只跳蛙"② 的解答中提到的那道"夏普的趣题"相比较。条件"点触,然后跳过两个圆圈"

① 斯旺西是英国威尔士南部港口城市,而达拉布尔在印度。—— 译者注

② 见本系列《亨利·杜德尼的数学趣题续编》第 103 题。—— 译者注

等同于“点触,然后沿一条直线走”。

227. 中央独粒钻石棋

这儿是一个用了十九步的解答,被包含在一对括号里的走棋只算一步:19—17,16—18, (29—17,17—19),30—18,27—25, (22—24,24—26),31—23, (4—16,16—28),7—9,10—8,12—10,3—11,18—6, (1—3,3—11), (13—27,27—25),(21—7,7—9),(33—31,31—23),(10—8,8—22,22—24,24—26,26—12,12—10),5—17。现在,除了一枚筹码还留在中央小孔之外,所有的筹码都被取走了。解答这道题需要较强的判断力,因为人们总是忍不住想在一步中进行好几次跳跃,而这样可能会把好棋给毁了。例如,在上面的解答中,走了第一个3—11之后,人们往往喜欢接着走11—25,25—27,或者11—9,9—7,以增加这一步的长度。

我认为步数不可能再减小了①。

228. 十只苹果

将盆子从上到下一行一行地顺次编号:(1,2,3,4),(5,6,7,8),(9,10,11,12),(13,14,15,16)②。然后将第8号盆子的苹果移到第10号盆子,并按下述步骤进行,不断地将被跳过的苹

---

① 事实上,英国数学家比斯利(John Beasley)于1964年证明,这个游戏的最小步数是18。下面是1912年由贝霍尔特(Ernest Bergholt)给出的18步解答:19—17,30—18,27—25,24—26,22—24,31—23,16—28,(33—31,31—23),11—25,3—11,(4—16,16—28,28—30,30—18,18—6),(13—27,27—25,25—23),7—9,10—8,(21—7,7—9),(1—3,3—11),(12—10,10—8,8—22,22—24,24—10),5—17。其中(13—27,27—25,25—23)这一步也可放到(1—3,3—11)之后执行。——译者注

② 一对括号代表一行。——译者注

果取走:9—11,1—9,13—5,16—8,4—12,12—10,3—1,1—9,9—11。

229. 九颗杏仁

这道趣题只要四步就可解决,具体如下:将5跳过8、9、3、1,将7跳过4,将6跳过2和7,将5跳过6。于是除了5之外,所有的筹码都被取走了,而5仍然在它原来所在的中心方格上。

230. 十二枚便士

这里是若干种解答中的一种:把12移到3,把7移到4,把10移到6,把8移到1,把9移到5,把11移到2。

231. 盘子与硬币

以插图中看到的那个男孩正要采取的顺序,将盘子从1到12编号。从1开始,如下进行,其中"从1到4"的意思是:你拿起第1号盘子里的那枚硬币,把它移到第4号盘子。从1到4,从5到8,从9到12,从3到6,从7到10,从11到2,然后完成最后一圈到达第1号盘子。一共转了三圈。你也可以这样进行:从4到7,从8到11,从12到3,从2到5,从6到9,从10到1。用四圈解决是很容易的,但用三圈的解答就比较难求了。

这道题其实是另一种包装下的"鱼塘之谜"(《坎特伯雷趣题集》第41题)。

232. 抓老鼠

在猫儿每次数到第十三只老鼠就把它吃掉的条件下,要使得最后吃掉的是那只白老鼠,那就必须从第七只老鼠开始数(以白老鼠为第一只老鼠)——也就是说,从那只最靠近猫儿尾

巴尖的老鼠开始数。在解决这个问题时，完全没有必要把所有的老鼠一只一只地作为起数点进行试验，直到你遇到符合要求的老鼠。因为你可以从任何一只老鼠开始数，然后记下最后被吃掉的老鼠离起数点有多少距离。你会发现它是第八只老鼠，因此起数点必定是从白老鼠开始反方向数的第八只老鼠，也就是我在上面已经指出的那只。

在第二道趣题中，你得求出这样一个最小数：猫儿用这个最小数从白老鼠开始数就可以在最后吃掉这只白老鼠。对于这种情况，如果你并未掌握这类问题的一般解法（这很难），那么你只能依次对每一个正整数进行试验，直到你遇到能产生这种结果的数。对你来说没有比这更好的办法了。这个最小数是二十一。如果你不得不采用试验法，那么你只要逐一算出被试数除以13、12、11、10等等所得的余数，就可以大大节省你的劳动。例如，在被试数为21的情况中，我们得到余数8、9、10、1、3、5、7、3、1、1、3、1、1。请注意我没有把除以7、3、1所得的余数取作0，而是7、3、1。现在，按这个数列转着圈依次数到其中的每个数[1]，你会发现，最后葬身猫腹的就是那只白老鼠。当然，如果我们仅仅是想求出具有这种性质的随便哪一个数，而不是最小数，那么我们只要取13、12、11、10等等一直到2这些数的最小公倍数就可以了。这个数是360 360，而且你会发现，第一次数到这个数将令第十三只老鼠丧生，第二次数到这个数将令第十二只老鼠丧生，接下来轮到第十一只老鼠，如此等等，直到第一只老鼠。但是当有一个小到二十一的数同样能为其目的服务的时候，你不能指望这只酷爱算术的猫儿会取这样一个庞大的数。

---

① 即从白老鼠开始数，数到第八只老鼠吃掉，再数到第九只老鼠吃掉，再数到第十只老鼠吃掉，如此等等。—— 译者注

对于第三种情况，这个最小数是100。1000这个数也行，而且在这两个数之间恰恰还有七十二个数同样可以让这猫儿用来取得这一成功[①]。

233. 古怪的干酪商

要使得这四叠干酪[②]处在一行的两端，可如下搬动干酪（其中的数字是指干酪的编号而非它们所在位置的编号）：7—2，8—7，9—8，10—15，6—10，5—6，14—16，13—14，12—13，3—1，4—3，11—4。这可能是所有已知解答中最容易的。要使得其中三叠堆在第13、14、15号干酪上，请这样做：9—4，10—9，11—10，6—14，5—6，12—15，8—12，7—8，16—5，3—13，2—3，1—2。要让这几叠干酪堆在3、5、12、14号干酪上，请这样做：8—3，9—14，16—12，1—5，10—9，7—10，11—8，2—1，4—16，13—2，6—11，15—4。

234. 关于换位的趣题

将下列一对对字母相互对换：H—K，H—E，H—C，H—A，I—L，I—F，I—D，K—L，G—J，J—A，F—K，L—E，D—K，E—F，E—D，E—B，B—K。如果我们完全不考虑对换，那么就会发现，虽然可以用11步将白色筹码移到它们该待的位置，但对于黑色筹码来说，少于17步是不能做到这一点的。因此我们不得不用白色筹码走一些废着，以与黑色筹码所需要的最小步数平衡。可见少于17步肯定不行。当然，有些步骤可相互交换。

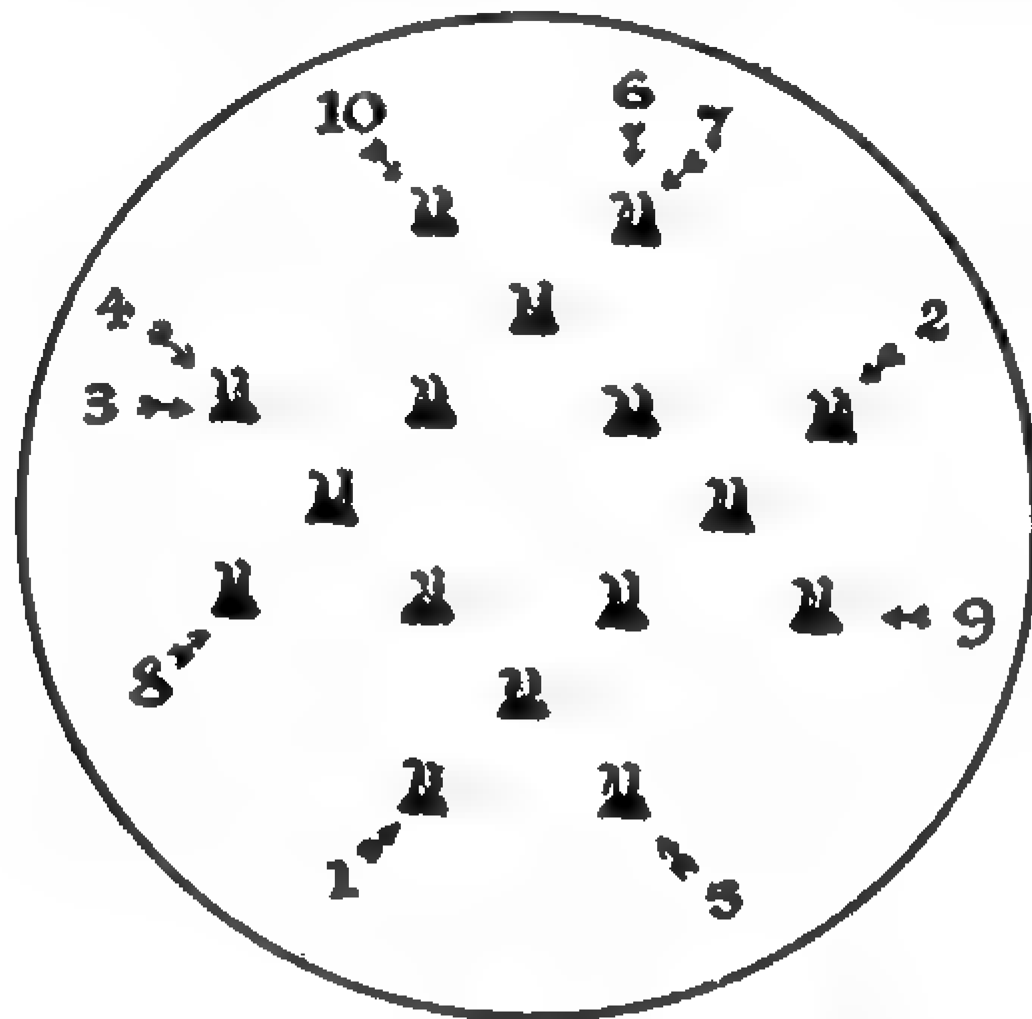
---

① 这道趣题所说的问题，即著名的约瑟夫斯问题，详情可参见本系列《国内外数学趣题集锦》第50题及其解答。——译者注

② 原文为 the three piles，似误。——译者注

235. 鱼雷实弹演习

如果将敌方的舰队停泊成如图所示的阵式，那么可以看到，按图中数字所示的顺序和图中箭头所示的方向发射鱼雷，这十六艘舰船中会有多达十艘的舰船被摧毁。随着一枚枚的鱼雷从三艘舰船底下穿过而把第四艘击沉，每有一艘舰船被击沉，就用铅笔把它划掉。



236. 帽子趣题

我曾建议读者用筹码来试着解决这道趣题，因此我用筹码来给出我的解答。缎面帽用黑色筹码表示，毛毡帽用白色筹码表

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
●	○	●	○	●	○	●	○	●	○		
●			○	●	○	●	○	●	○	○	●
●	●	○	○	●	○			●	○	○	●
●	●	○			○	○	●	●	○	○	●
●	●	○	○	○	○	○	●	●			●
		○	○	○	○	○	●	●	●	●	●

示。第一行显示了处于原始位置的帽子，接下来的各行则依次显示了每做一次操作(一共五次) 后的状态。于是可以看到，我们首先移动2号和3号位置上的帽子，接着是7号和8号，再下来是4号和5号，然后10号和11号，最后是1号和2号，结果使得五顶缎面帽靠在一起，五顶毛毡帽也靠在一起[①]，而且两个空挂钩在这排帽子的一头。先移动的三对帽子每对都是不同颜色，后移动的两对帽子则每对颜色相同。这道题目还有着其他的解法。

237. 男孩与女孩

这道趣题有许许多多不同的解答。除了7号和8号，任何一对相邻的孩子都可以在第一步被移动，而进行了这第一步之后，就有各种变化了。下面的解答显示了从一开始依次经过每一步直到最后的情况：

· · 1 2 3 4 5 6 7 8
4 3 1 2 · · 5 6 7 8
4 3 1 2 7 6 5 · · 8
4 3 1 2 7 · · 5 6 8
4 · · 2 7 1 3 5 6 8
4 8 6 2 7 1 3 5 · ·

238. 整理果酱罐

13号和19号这两个罐子本来就在它们应在的位置上。由于每一次对换都可以把一个罐子放到它应在的位置上，因此很显然，二十二次对换将使所有的罐子按顺序排列。但是这个对换次

---

① 原文是 leaving the four silk hats together, and the four felt hats together，似误。——译者注

数并不是最小的，正确的答案是十七次。将下列一对对罐子相互对换：(3—1,2—3)，(15—4,16—15)，(17—7,20—17)，(24—10,11—24,12—11)，(8—5,6—8,21—6,23—21,22—23,14—22,9—14,18—9)。当你将随便哪一对括号里的对换进行完毕时，这对括号里的数字就在它们应在的位置上了。一共有五对括号，22 减去 5 就得到所需对换的次数——17[①]。

① 请注意任何一对括号里的对换个数都比其中不同数字的个数小 1。——译者注

编者说明

亨利·欧内斯特·杜德尼(Henry Ernest Dudeney,1857—1930)是19世纪末20世纪初的著名英国趣味数学家,他的主要作品有《数学中的娱乐》(*Amusements in Mathematics*)、《坎特伯雷趣题集》(*Canterbury Puzzles*)等。我们计划在近期内将这些作品翻译出版。

《数学中的娱乐》一书共包括数学趣题430道,本书即其中的第1题至第238题,包括"算术和代数问题"、"几何问题"、"点与线问题"、"筹码移动问题"这4个部分。余下的部分有"一笔画和路径问题"、"组合与分组问题"、"棋盘问题"、"关于测量、称重和填装的趣题"、"过河问题"、"关于游戏的问题"、"伤脑筋的游戏"、"幻方问题"、"迷宫及其解法"、"矛盾百出的聚会"和"无法归类的问题",即第239题至第430题,它们将在《亨利·杜德尼的数学趣题续编》一书中与广大读者见面。

杜德尼的作品虽然是在约一个世纪前撰写的,但读者可以发现,到今天它们仍然寓意隽永,独特清新,仍可在培养兴趣、训练思维、开发智力方面起到良好的作用。

更重要的是,杜德尼的作品是世界趣味数学史上的经典文献。出于这一点,为保持本书的历史风貌,我们在编辑上作了一些不同一般的处理:

(1)书中所有的插图均按原样,除补正一二处遗漏差错外,一般不作改动。

(2)书中出现的数，凡原文用文字表示的(如 twenty)，中译文一般也用文字表示(如"二十")；原文用印度-阿拉伯数字表示的，中译文同。

(3)书中作为数学符号和指代符号出现的英文字母，其正斜体均按原文，一律不作改动。

以上情况，特此说明。

编　者



约翰·斯诺格斯："这很简单。再听一遍！你是我父亲的内弟，又是我弟弟的岳父，还是我岳父的弟弟。你看，我父亲……"

但是布洛格斯先生拒绝再听下去。读者能不能说明怎么会有这种三位一体的奇特亲戚关系？

上架建议：数理科学与化学



易文网：www.ewen.cc
ISBN 978-7-5428-4108-7/O·464
定价： 22.00 元